

# Kalman d'ensemble état-paramètres appliqué au modèle de Lorenz

Laurent BOURGOIS<sup>1</sup>, Gilles ROUSSEL<sup>1</sup>, Mohammed BENJELLOUN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Univ Lille Nord de France, F-59000 Lille, France

ULCO, LISIC, F-62228 Calais, France

Maison de la Recherche Blaise Pascal - Centre Universitaire de la Mi-Voix

50 rue Ferdinand Buisson - B.P. 719, 62228 Calais Cedex, France.

*prénom.nom@lisic.univ-littoral.fr*

**Résumé**— Cette étude aborde le problème du filtrage d'état d'un modèle d'évolution spatio-temporelle fortement non linéaire, en présence de paramètres inconnus et avec un objectif de coût de calcul minimum. Si l'on accepte la sous optimalité, le filtre de Kalman d'ensemble (ensemble Kalman filter, EnKF) dual est un bon candidat en particulier pour les problèmes de grande dimension que nous envisageons. Cette étude teste ses performances de convergence sur un modèle à dimension réduite, réputé difficile, à savoir le modèle de Lorenz.

**Mots-clés**— Dual EnKF, modèle de Lorenz, non-linéarité, Monte Carlo, filtrage état-paramètres, complexité.

## I. INTRODUCTION

L'assimilation de données physiques dans le cadre de la surveillance de systèmes environnementaux rassemble beaucoup de difficultés en un même problème d'estimation. Si l'on écarte les méthodes variationnelles, on a alors recours aux techniques de filtrages séquentielles basées sur la correction des prédictions d'un modèle par les observations. La complexité du filtrage vient en général de la nature du modèle d'évolution. Si l'on conjugue l'évolution spatio-temporelle d'un système ayant une grande dimension de l'espace, en présence de contraintes de temps allouées à l'estimation en ligne, en présence de contraintes d'échantillonnage rapide inhérentes aux contraintes de stabilité numériques, en présence de non-linéarités du modèle d'état ou d'observation, en présence d'incertitudes portant sur de nombreux paramètres, cela oblige à optimiser les méthodes de filtrage existantes. Dans ce contexte, le filtrage de Kalman d'ensemble dual répond assez bien à la problématique. Cette étude se focalise sur l'analyse des performances de l'algorithme pour l'estimation simultanée des états et de certains paramètres inconnus du modèle de Lorenz souvent cité en référence. L'analyse des performances de ce même algorithme vis-à-vis de la dimension du vecteur d'état n'est pas abordée ici.

Bon nombre d'approches combinant l'estimation séquentielle du vecteur d'état et l'identification des paramètres d'un modèle procèdent par estimation jointe, c'est-à-dire que le vecteur d'état est augmenté du vecteur des paramètres à estimer [1], [2]. Pour les problèmes de grande dimension, il est préférable de dissocier les phases d'estimation d'état et de paramètres pour diminuer la taille du vecteur global. Cette approche consiste à combiner deux filtres activés consécutivement dans la même itération afin d'estimer de façon duale, les paramètres à partir du dernier état analysé, puis le nouvel état à partir des paramètres précédemment analysés. La procédure ne privilégie pas d'ordre entre état et paramètres. Cette forme de filtrage permet d'estimer toutes les sources d'incertitude, y compris pour les paramètres variant dans le temps. Cette approche a été initialement proposée sous la forme d'un filtre de Kalman standard (Kalman filter, KF)

appliqué à l'hydrologie [3], [4].

Une forme dérivée du filtre de Kalman doit être utilisée lorsque le système physique présente des non linéarités liées soit au modèle du processus, soit au modèle d'observation, soit aux deux simultanément. Ainsi, plusieurs exemples d'estimation duale ont été étudiés à l'aide du filtre de Kalman étendu (extended Kalman filter, EKF) [5], en particulier pour l'estimation de modèles neuronaux [6], [7] où la jacobienne du propagateur non linéaire est calculé autour du point de fonctionnement à chaque itération puis introduite dans les équations du filtre de Kalman. En cas de forte non linéarité, les densités de probabilité *a priori* et *a posteriori* ne sont plus gaussiennes. De fait, le calcul des deux premiers moments n'est plus suffisant pour caractériser complètement la distribution des états. Cette approximation est souvent à l'origine de certaines divergences ou instabilités de l'estimation [8], [9], [10], [11].

Le filtre de Kalman sans parfum (unscented Kalman filter, UKF) introduit par Julier et Uhlmann a l'avantage de bénéficier d'une meilleure robustesse vis-à-vis des systèmes fortement non linéaires, sans pour autant exiger un coût calculatoire additionnel significatif en retour [12]. De plus, ce filtre permet de s'affranchir de l'étape de linéarisation, évitant ainsi le calcul de jacobiens. Les deux premiers moments sont estimés par un ensemble minimal de points judicieusement choisis, appelés « sigma points », dont le nombre dépend de la dimension du vecteur d'état. Ils sont propagés grâce à l'équation dynamique du système. L'équation d'observation fournit la sortie prédite, la moyenne et la covariance *a posteriori* évaluées au second ordre, tout en minimisant le troisième ordre du développement de Taylor. Le filtre de Kalman sans parfum est donc par construction mieux adapté aux systèmes fortement non linéaires.

Les filtres de Kalman étendu ou sans parfum sont de complexité cubique  $O(n^3)$  avec  $n$  la dimension du vecteur d'état pour déterminer les matrices de covariance de l'erreur de prédiction et d'analyse. La mise en œuvre de ce type de filtre devient très lourde pour un vecteur d'état de grande dimension.

Pour pallier ces inconvénients, il est accepté d'adopter une méthode sous-optimale. De nature stochastique, le filtre de Kalman d'ensemble imaginé par Evensen fait partie des filtres sous-optimaux à particules basés sur une méthode de Monte Carlo [9], [13], [14], [15], [16], [17]. L'idée consiste à estimer la densité de probabilité gaussienne des états le long de la trajectoire définie par le modèle, en estimant les statistiques d'ordre 2 à partir d'un ensemble de membres tirés aléatoirement. En d'autres termes, il s'agit d'évaluer la matrice de covariance empirique d'un ensemble d'éléments tirés aléatoirement depuis l'état courant, plutôt que de calculer sa valeur exacte par propagation avec

le modèle. Le choix d'une fonction de distribution gaussienne de l'état et des observations permet alors d'appliquer une étape de correction linéaire. De ce fait, le coût algorithmique est de complexité linéaire  $O(m)$  où  $m$  est le produit entre la dimension du vecteur d'état, le nombre de mesures et le nombre de tirages par itération. Cette complexité est largement réduite par rapport aux filtres précédents. Prenons l'exemple de l'estimation du champ de concentration d'un polluant donné sur une surface carrée de 1 km sur 1 km. Pour un pas spatial de 1 m, 10 observations et 50 tirages de Monte Carlo par itération, le coût algorithmique du filtre EnKF est alors de  $O(5.10^8)$  contre  $O(1.10^{18})$  pour les filtres EKF et UKF. L'EnKF est ainsi capable d'estimer un vecteur d'état de plusieurs milliers de variables, tout en garantissant une erreur quadratique moyenne proche de la borne de Cramer-Rao [18], [19], [20]. Il présente en outre l'avantage d'être parallélisable, puisque chaque tirage d'état (particules) peut être calculé indépendamment des autres. Malgré certaines similitudes avec les filtres particulaires, sa limitation aux statistiques d'ordre 2 le cantonne dans la catégorie des filtres gaussiens. Néanmoins, ce type de filtrage permet d'estimer correctement l'état avec un nombre de particules relativement faible par rapport au filtrage particulaire. Il fournit par ailleurs de bons résultats par rapport aux méthodes variationnelles lorsque la dimension du vecteur d'état est grande, car cette méthode ne nécessite pas de dérivation des équations adjointes, ni d'intégration rétrograde du modèle d'évolution. Enfin, soulignons qu'une étude associant le filtrage de Kalman d'ensemble à une estimation duale dans le cas de paramètres supposés constants et un observatoire fixe et très dense a fait l'objet de travaux récents [21].

La présente étude a pour objet de mettre en œuvre le filtre de Kalman d'ensemble dual en vue d'estimer les états et les paramètres supposés inconnus du modèle de Lorenz, souvent pris comme référence pour l'estimation d'état des modèles non linéaires. Après un rappel du filtre de Kalman d'ensemble et de la version duale, des résultats comparatifs permettent d'apprécier les performances selon différents points de vue.

## II. PRINCIPE DU FILTRE DE KALMAN D'ENSEMBLE

Le filtre de Kalman d'ensemble est basé sur une méthode de Monte Carlo dont l'idée directrice consiste à représenter de manière empirique les caractéristiques statistiques de l'estimateur. Pour cela, le calcul de la matrice de covariance de l'erreur de prévision au temps  $t + 1$  n'est plus effectué en projetant dans le temps la matrice de covariance de l'erreur d'analyse à l'instant  $t$ , mais plutôt en propageant un ensemble fini d'états générés aléatoirement. L'erreur est donc représentée statistiquement grâce à un nuage de points propagés par le modèle d'évolution sans qu'aucune étape de linéarisation ne soit requise. Dans la suite, nous considérons le système dynamique non linéaire à temps discret suivant :

$$\mathbf{x}_{t+1} = g(\mathbf{x}_t, \boldsymbol{\theta}, \mathcal{U}_t) + \mathbf{w}_t \quad (1)$$

Dans ce système, le propagateur des états du modèle  $g$  est une fonction non linéaire qui dépend non seulement du vecteur d'état  $\mathbf{x}_t$ , mais également d'une entrée de commande éventuelle  $\mathcal{U}_t$  (termes de forçage) et parfois d'un vecteur de paramètres du modèle  $\boldsymbol{\theta}$ . Le bruit de modèle  $\mathbf{w}_t$  est considéré gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $Q$  :

$$\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(0, Q) \quad (2)$$

Le vecteur  $\mathbf{y}_{t+1}$  des observations disponibles au temps  $t + 1$  est relié à l'état du système par l'équation de mesure suivante :

$$\mathbf{y}_{t+1} = h(\mathbf{x}_{t+1}) + \mathbf{v}_{t+1} \quad (3)$$

La fonction d'observation  $h$  est également non linéaire et toutes les sources d'erreur d'observation sont prises en considération par le vecteur  $\mathbf{v}_{t+1}$  supposé gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $R$  :

$$\mathbf{v}_{t+1} \sim \mathcal{N}(0, R) \quad (4)$$

L'ensemble des vecteurs aléatoires modélisant les bruits d'état et de mesure sont supposés indépendants. Dès lors, le mécanisme d'évolution du filtre de Kalman d'ensemble est fondé sur un schéma de type prédiction-corrrection.

Durant l'étape de prédiction, l'ensemble des états d'ébauche est constitué en réitérant  $N_t$  fois l'équation d'état (1) avec  $N_t$  le nombre de membres de l'ensemble. En procédant ainsi, chaque particule explore l'espace d'états de façon indépendante :

$$\mathbf{x}_{t+1}^{f,i} = g(\mathbf{x}_t^{a,i}, \boldsymbol{\theta}, \mathcal{U}_t) + \mathbf{w}_t^i, \quad i = 1, \dots, N_t \quad (5)$$

Dans cette relation, le vecteur  $\mathbf{x}_{t+1}^{f,i}$  représente le  $i^{\text{e}}$  membre de l'ensemble des états prédits à l'instant  $t + 1$  et  $\mathbf{w}_t^i$  désigne évidemment le bruit de modèle associé. De la même manière, le vecteur  $\mathbf{x}_t^{a,i}$  correspond au  $i^{\text{e}}$  membre de l'ensemble des états corrigés à l'instant  $t$ . L'ensemble des sorties prédites peut être constitué de la manière suivante :

$$\mathbf{y}_{t+1}^{f,i} = h(\mathbf{x}_{t+1}^{f,i}), \quad i = 1, \dots, N_t \quad (6)$$

Le vecteur  $\mathbf{y}_{t+1}^{f,i}$  désigne le  $i^{\text{e}}$  membre de l'ensemble des sorties prédites à l'instant  $t + 1$ . Il est clair que la matrice de covariance de l'erreur de prédiction  $\mathbf{P}_{t+1}^f$  à l'instant  $t + 1$  peut être estimée de manière empirique. Néanmoins, contrairement au filtre de Kalman standard, ce calcul est facultatif. En effet, cette matrice n'intervient pas dans le mécanisme d'évolution du filtre de Kalman d'ensemble. Cependant, la méthodologie d'estimation empirique est proposée dans ce qui suit pour son rôle dans une autre partie de l'algorithme. L'idée consiste dans un premier temps à approcher l'état « vrai » du système en calculant la moyenne empirique  $\bar{\mathbf{x}}_{t+1}^f$  de l'ensemble des états prédits à l'instant  $t + 1$  :

$$\bar{\mathbf{x}}_{t+1}^f = \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} \mathbf{x}_{t+1}^{f,i} \quad (7)$$

L'estimateur empirique non biaisé  $\hat{P}_{t+1}^f$  de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction à l'instant  $t + 1$  s'obtient alors dans un second temps à partir de l'équation suivante :

$$\hat{P}_{t+1}^f = \frac{1}{N_t - 1} \sum_{i=1}^{N_t} (\mathbf{x}_{t+1}^{f,i} - \bar{\mathbf{x}}_{t+1}^f) (\mathbf{x}_{t+1}^{f,i} - \bar{\mathbf{x}}_{t+1}^f)^t \quad (8)$$

Afin d'éviter le phénomène de coalescence des particules dispersées, Burgers, van Leeuwen et Evensen ont montré en 1998 qu'il est essentiel de perturber les observations pour chacun des membres de l'ensemble et d'estimer de manière empirique la matrice de covariance de l'erreur d'observation intervenant dans le calcul du gain de Kalman [13], [14]. De cette manière, l'échantillon statistique est continuellement mis à jour, garantissant ainsi une diffusion suffisante des particules et évitant

la divergence de l'algorithme. L'idée consiste à considérer des observations aléatoires centrées sur l'observation actuelle et de matrice de covariance  $R$  de sorte que :

$$\mathbf{y}_{t+1}^i = \mathbf{y}_{t+1} + \mathbf{v}_{t+1}^i, \quad i = 1, \dots, N_t \quad (9)$$

Le vecteur  $\mathbf{y}_{t+1}^i$  représente le  $i^{\text{e}}$  membre de l'ensemble des observations à l'instant  $t + 1$  et  $\mathbf{v}_{t+1}^i$  désigne la perturbation associée. Ensuite, l'estimateur empirique non biaisé  $\widehat{R}_{t+1}$  de la matrice de covariance de l'erreur d'observation à l'instant  $t + 1$  s'obtient facilement, grâce à l'hypothèse (4) par :

$$\widehat{R}_{t+1} = \frac{1}{N_t - 1} \sum_{i=1}^{N_t} (\mathbf{v}_{t+1}^i) (\mathbf{v}_{t+1}^i)^t \quad (10)$$

Lorsque le nombre de tirages de Monte Carlo tend vers l'infini, l'estimateur empirique  $\widehat{R}_{t+1}$  tend vers la matrice de covariance de l'erreur d'observation  $R$ .

L'étape de correction consiste alors à mettre à jour chaque membre disponible de l'ensemble des états d'ébauche en utilisant l'observation actuelle. Pour cela, l'équation de correction linéaire suivante est appliquée :

$$\mathbf{x}_{t+1}^{a,i} = \mathbf{x}_{t+1}^{f,i} + K_{t+1} (\mathbf{y}_{t+1}^i - \mathbf{y}_{t+1}^{f,i}), \quad i = 1, \dots, N_t \quad (11)$$

Le vecteur  $\mathbf{x}_{t+1}^{a,i}$  représente le  $i^{\text{e}}$  membre de l'ensemble des états corrigés à l'instant  $t + 1$ . Le gain de Kalman  $K_{t+1}$  s'exprime à l'aide des prédictions d'ensemble de la manière suivante :

$$K_{t+1} = \widehat{P}_{xy,t+1}^f (\widehat{P}_{yy,t+1}^f + \widehat{R}_{t+1})^{-1} \quad (12)$$

Dans cette expression,  $\widehat{P}_{xy,t+1}^f$  désigne l'estimateur empirique non biaisé de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction croisée entre l'état et la sortie à l'instant  $t + 1$ . De même,  $\widehat{P}_{yy,t+1}^f$  représente l'estimateur empirique non biaisé de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction de la sortie à l'instant  $t + 1$ . Ces estimateurs sont obtenus en suivant un protocole semblable à celui utilisé pour estimer la matrice de covariance de l'erreur de prédiction  $\widehat{P}_{t+1}^f$ . De cette manière, en introduisant  $\bar{\mathbf{y}}_{t+1}^f$  la moyenne empirique de l'ensemble des sorties prédites à l'instant  $t + 1$ , nous obtenons :

$$\widehat{P}_{xy,t+1}^f = \frac{1}{N_t - 1} \sum_{i=1}^{N_t} (\mathbf{x}_{t+1}^{f,i} - \bar{\mathbf{x}}_{t+1}^f) (\mathbf{y}_{t+1}^{f,i} - \bar{\mathbf{y}}_{t+1}^f)^t \quad (13)$$

$$\widehat{P}_{yy,t+1}^f = \frac{1}{N_t - 1} \sum_{i=1}^{N_t} (\mathbf{y}_{t+1}^{f,i} - \bar{\mathbf{y}}_{t+1}^f) (\mathbf{y}_{t+1}^{f,i} - \bar{\mathbf{y}}_{t+1}^f)^t \quad (14)$$

Lorsque le nombre de mesures est supérieur au nombre de membres de l'ensemble, la matrice à inverser dans le calcul du gain de Kalman peut devenir singulière. Dans ce cas, Evensen préconise l'emploi du pseudo-inverse basé sur une décomposition en valeurs singulières [14]. Par ailleurs, il est possible de retrouver l'expression standard du gain de Kalman en linéarisant l'opérateur  $h$  intervenant indirectement dans la relation (12). Toutefois, l'avantage de cette représentation particulière réside dans le fait qu'aucune linéarisation n'est requise et que la matrice de covariance de l'erreur de prédiction n'a plus besoin d'être calculée, réduisant ainsi considérablement le coût calculatoire et permettant une économie en termes d'espace de stockage [19]. De plus, ce mécanisme d'évolution particulier rend le filtre de Kalman d'ensemble particulièrement

compatible avec les machines de calcul parallèle puisque les membres de l'ensemble des états corrigés peuvent être calculés indépendamment les uns des autres.

### III. ESTIMATION DUALE ÉTAT-PARAMÈTRES

Dans la section précédente, nous avons supposé connaître entièrement le vecteur des paramètres apparaissant dans le système dynamique non linéaire (1). En pratique, il arrive que la plupart de ces paramètres soient inconnus ou imprécis. La méthode de filtrage employée doit garder ses propriétés de convergence si l'on estime simultanément les variables d'état et les paramètres à partir des observations disponibles. Deux manières de procéder permettent de répondre à cette attente.

Une première technique procède par estimation jointe et consiste à augmenter le vecteur d'estimation du filtre par les paramètres du modèle inconnus. La matrice de covariance de l'erreur du modèle  $Q$  résume alors l'incertitude associée aux états et paramètres. De manière générale, il est recommandé de diminuer la confiance accordée aux paramètres de sorte que l'influence des mesures sur la correction soit plus forte. Toutefois, afin de ne pas avoir à manipuler un vecteur d'état augmenté de dimension excessive lorsque le nombre de paramètres est conséquent, nous préférons éviter cette configuration et utiliser la seconde méthode plus appropriée.

Cette approche consiste à combiner deux filtres afin d'estimer de façon duale, alternativement et séparément au cours de chaque itération, les paramètres du modèle à partir de l'état corrigé à l'instant précédent, puis le nouvel état à partir des paramètres fraîchement analysés.

L'estimation du vecteur des paramètres est réalisée de similairement à celle du vecteur d'état, mais une marche aléatoire forcée des paramètres est mise en place suivant une loi gaussienne  $\boldsymbol{\eta}_t$  de moyenne nulle et de matrice de covariance  $Z$  :

$$\boldsymbol{\eta}_t \sim \mathcal{N}(0, Z) \quad (15)$$

De cette manière, l'étape de prédiction des paramètres devient :

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1}^{f,i} = \boldsymbol{\theta}_t^{a,i} + \boldsymbol{\eta}_t^i \quad (16)$$

Le vecteur  $\boldsymbol{\theta}_{t+1}^{f,i}$  représente le  $i^{\text{e}}$  membre de l'ensemble des paramètres prédits à l'instant  $t + 1$  et  $\boldsymbol{\eta}_t^i$  désigne le bruit additif associé. De la même manière, le vecteur  $\boldsymbol{\theta}_t^{a,i}$  correspond au  $i^{\text{e}}$  membre de l'ensemble des paramètres corrigés à l'instant  $t$ . L'ensemble des paramètres prédits sont ensuite mis à jour grâce aux observations disponibles. Pour cela, l'ensemble des états prédits à l'instant  $t + 1$  est d'abord construit à partir des paramètres prédits à l'instant  $t + 1$  et des états corrigés par à l'instant  $t$ . Ainsi :

$$\mathbf{x}_{t+1}^{f,i} = g(\mathbf{x}_t^{a,i}, \boldsymbol{\theta}_{t+1}^{f,i}, \mathcal{U}_t), \quad i = 1, \dots, N_t \quad (17)$$

Dans un second temps l'ensemble des sorties prédites est obtenu par :

$$\mathbf{y}_{t+1}^{f,i} = h(\mathbf{x}_{t+1}^{f,i}), \quad i = 1, \dots, N_t \quad (18)$$

Compte tenu des observations rendues aléatoires (cf. équation (9)) et du calcul du gain de Kalman (cf. équation (10)), la mise à jour de l'ensemble des paramètres prédits est réalisée par l'analyse de Kalman selon la procédure suivante :

$$\boldsymbol{\theta}_{t+1}^{a,i} = \boldsymbol{\theta}_{t+1}^{f,i} + K1_{t+1} (\mathbf{y}_{t+1}^i - \mathbf{y}_{t+1}^{f,i}), \quad i = 1, \dots, N_t \quad (19)$$

Le gain de Kalman permettant de corriger la trajectoire des paramètres s'exprime à l'aide des prédictions d'ensemble comme suit :

$$K1_{t+1} = \widehat{P}_{\theta_{y,t+1}}^f \left( \widehat{P}_{yy,t+1}^f + \widehat{R}_{t+1} \right)^{-1} \quad (20)$$

Dans cette expression,  $\widehat{P}_{\theta_{y,t+1}}^f$  désigne l'estimateur empirique non biaisé de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction croisée entre les paramètres et la sortie à l'instant  $t+1$ .

Une fois la mise à jour de l'ensemble des paramètres prédits effectuée, le second filtre prend le relais afin d'estimer l'état du système à l'instant  $t+1$  en supposant les paramètres du modèle connus. En d'autres termes, il s'agit de faire confiance à l'ensemble des paramètres tout juste corrigés par le premier filtre. Le mécanisme de prédiction-corrrection est ensuite identique à celui du filtre de Kalman d'ensemble classique. Dans un premier temps l'ensemble des états prédits à l'instant  $t+1$  est construit à partir de l'ensemble des états corrigés à l'instant  $t$  et de l'ensemble des paramètres corrigés à l'instant  $t+1$  :

$$\mathbf{x}_{t+1}^{f,i} = g \left( \mathbf{x}_t^{a,i}, \boldsymbol{\theta}_{t+1}^{a,i}, \mathcal{U}_t \right) + \mathbf{w}_t^i, \quad i = 1, \dots, N_t \quad (21)$$

Cet ensemble d'états d'ébauche est obtenu à l'aide du modèle de prédiction (1) faisant intervenir le bruit de modèle  $\mathbf{w}_t$  de moyenne nulle et de matrice de covariance  $Q$ . Dans un second temps l'ensemble des sorties prédites est alors calculé par :

$$\mathbf{y}_{t+1}^{f,i} = h \left( \mathbf{x}_{t+1}^{f,i} \right), \quad i = 1, \dots, N_t \quad (22)$$

A ce stade, les observations sont de nouveau considérées comme des variables aléatoires et la matrice de covariance de l'erreur d'observation intervenant dans le calcul du gain de Kalman est aussi estimée de manière empirique. Dès lors, la mise à jour de l'ensemble des états prédits est réalisée par l'analyse de Kalman selon la procédure suivante :

$$\mathbf{x}_{t+1}^{a,i} = \mathbf{x}_{t+1}^{f,i} + K2_{t+1} \left( \mathbf{y}_{t+1}^i - \mathbf{y}_{t+1}^{f,i} \right), \quad i = 1, \dots, N_t \quad (23)$$

Le gain de Kalman permettant de corriger la trajectoire des états s'exprime à l'aide des prédictions d'ensemble de la même manière que précédemment (cf. équation (12)).

Il est intéressant de souligner que la procédure de prédiction-corrrection de l'état du système peut précéder celle opérant sur les paramètres du modèle sans conséquence sur la qualité d'estimation. Cette méthode est généralement qualifiée d'estimation duale état-paramètres. Lorsque l'entrée de commande est inconnue, nous pouvons chercher à l'estimer de la même manière que les paramètres en lui associant une incertitude propre. La section suivante propose de tester l'algorithme du filtre de Kalman d'ensemble pour l'estimation duale état-paramètres dans le cas particulier du modèle de Lorenz.

#### IV. APPLICATION AU MODÈLE DE LORENZ

L'oscillateur de Lorenz est un système dynamique tridimensionnel non linéaire susceptible d'engendrer un comportement chaotique. Ce modèle a été introduit par Lorenz en 1963 et demeure célèbre pour la dynamique extrêmement complexe qu'il est capable de générer à partir d'un système d'équations formellement très simple [22]. Par conséquent, cet oscillateur est depuis couramment utilisé pour valider les méthodes

d'assimilation de données car il permet notamment de reproduire le caractère non prédictible de l'évolution des systèmes météorologiques. Ainsi, au cours de ces 15 dernières années, le modèle de Lorenz a été employé à plusieurs reprises pour comparer les propriétés de diverses méthodes. Nous pouvons citer tout d'abord une étude datant de 1994 comparant le filtre de Kalman étendu et la méthode variationnelle [10]. Nous distinguons ensuite une série de tests portant à la fois sur le filtre de Kalman d'ensemble, sur une méthode de lissage de données et sur une méthode d'optimisation par descente de gradient [23]. Puis, nous relevons un peu plus tard une étude réalisée sur le filtre particulière ainsi que sur plusieurs variantes du filtre de Kalman d'ensemble et du filtre de Kalman étendu singulier évolutif (singular evolutive extended Kalman, SEEK) [24]. Enfin, un travail visant à comparer deux versions du filtre particulière avec le filtre de Kalman d'ensemble a vu le jour récemment [18], [25]. Nous proposons d'enrichir la liste de ces comparaisons en étudiant les propriétés du filtre de Kalman d'ensemble pour l'estimation duale état-paramètres appliqué au modèle de Lorenz.

D'un point de vue purement conceptuel, le modèle de Lorenz dérive des équations de Navier-Stokes. Il s'agit d'une version simplifiée qui représente un écoulement de fluide particulier. Plus exactement, les équations associées à l'oscillateur de Lorenz décrivent de façon triviale les phénomènes de convection d'un fluide idéal. Le système de Lorenz en temps continu est défini comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dx_t}{dt} = Pr(y_t - x_t) + w_{x,t} \\ \frac{dy_t}{dt} = Ra x_t - y_t + x_t z_t + w_{y,t} \\ \frac{dz_t}{dt} = x_t y_t - \beta z_t + w_{z,t} \end{cases} \quad (24)$$

Dans ce système dynamique, la variable  $x_t$  est proportionnelle à l'intensité du mouvement de convection, c'est-à-dire que plus la vitesse de circulation des rouleaux convectifs est élevée, plus la valeur de  $x_t$  est grande. Par ailleurs, une circulation s'effectuant dans le sens horaire est caractérisée par une valeur positive de  $x_t$ . La variable  $y_t$  est proportionnelle à la différence de température entre les courants ascendants et descendants, tandis que la variable  $z_t$  est liée au gradient de température. Malgré cela, ces trois variables sont traitées comme des coordonnées spatiales afin de pouvoir représenter graphiquement les trajectoires à long terme du système dynamique de Lorenz. Les paramètres  $Pr$ ,  $Ra$  et  $\beta$  sont strictement positifs et correspondent respectivement au nombre de Prandtl, au nombre de Rayleigh et au rapport entre la hauteur et la largeur du système de convection. Nous imposons  $Pr = 10$ ,  $Ra = 28$  et  $\beta = 8/3$  de sorte que le système présente un comportement chaotique. Les termes  $w_{x,t}$ ,  $w_{y,t}$  et  $w_{z,t}$  sont supposés représenter les perturbations extérieures et les erreurs de modélisation inconnues à l'instant  $t$ . Ils sont indépendants et peuvent être regroupés dans un vecteur  $\mathbf{w}_t = (w_{x,t}, w_{y,t}, w_{z,t})^t$ . Ce vecteur est une distribution gaussienne  $\mathcal{N}(0, Q)$ . De la même manière, nous définissons le vecteur des paramètres du modèle  $\boldsymbol{\theta} = (Pr, Ra, \beta)^t$  et le vecteur d'état  $\mathbf{x}_t = (x_t, y_t, z_t)^t$  à l'instant  $t$ . L'état du système à l'instant initial est fréquemment défini par  $\mathbf{x}_0 = (1.50887, -1.531271, 25.46091)^t$ . Ces valeurs particulières caractérisent l'état initial de référence.

Nous supposons ensuite qu'une suite d'observations perturbées par un bruit  $\mathcal{N}(0, R)$ . Ces observations sont réparties

régulièrement dans l'intervalle de temps à l'aide d'un pas  $\delta_t$ . Avant de chercher à reconstruire la trajectoire des états du système à partir de ces observations, les équations du système (24) doivent être résolues. L'astuce classique consiste à réitérer périodiquement deux étapes distinctes [23], [18], [25]. Tout d'abord, il s'agit de résoudre numériquement le système de Lorenz sans bruit entre deux instant d'observations  $t$  et  $t + 1$ . Pour ce faire, nous introduisons un pas d'échantillonnage temporel  $\delta_{t'}$  de telle sorte que  $\delta_{t'} \ll \delta_t$  et nous appliquons le schéma d'Euler explicite. Le système d'équations discrètes obtenu est le suivant :

$$\begin{cases} x_{t'+1} &= (1 - \delta_{t'} Pr) x_{t'} + \delta_{t'} Pr y_{t'} \\ y_{t'+1} &= \delta_{t'} Ra x_{t'} + (1 - \delta_{t'}) y_{t'} - \delta_{t'} x_{t'} z_{t'} \\ z_{t'+1} &= (1 - \delta_{t'} \beta) z_{t'} + \delta_{t'} x_{t'} y_{t'} \end{cases} \quad (25)$$

Ensuite, à l'instant  $t + 1$  les bruits de modélisation gaussiens sont ajoutées à chaque observation. La condition initiale est générée aléatoirement à partir d'une distribution gaussienne  $\mathcal{N}(\mathbf{x}_0, Q_0)$ .

L'estimation de la trajectoire des états du système ainsi que la valeur des paramètres du modèle à partir des observations disponibles est réalisée à l'aide du filtre de Kalman d'ensemble. Nous proposons d'apporter quelques éléments de comparaison en termes de performances entre les méthodes d'estimation duale et jointe. Une procédure d'estimation par filtrage de Kalman d'ensemble standard, c'est-à-dire lorsque les paramètres sont connus, est également développée en guise de référence.

Les observations sont réparties régulièrement dans l'intervalle de temps  $[0; 20]$ . Le pas de temps est défini par  $\delta_t = 0.2$  de manière à obtenir 100 observations au total. Ces observations sont simulées en employant dans un premier temps la stratégie de discrétisation exposée ci-dessus. Pour ce faire, nous fixons le vecteur des paramètres du modèle  $\theta = (10, 28, 8/3)^t$  et nous considérons l'état initial de référence, ce qui revient à fixer  $Q_0$  nulle. Le schéma d'Euler explicite est alors appliqué à l'aide du pas d'échantillonnage temporel  $\delta_{t'} = 0.002$  en ajoutant à chaque instant d'observation, c'est-à-dire tous les 100 pas de temps, le bruit de modèle de distribution  $\mathcal{N}(0, Q)$ . La trajectoire du modèle de Lorenz ainsi obtenue adopte un comportement chaotique et représente la trajectoire de référence à estimer. Il suffit d'ajouter dans un second temps à chaque instant d'observation le bruit de mesure de distribution  $\mathcal{N}(0, R)$ .

Une fois les observations simulées, nous précisons quelques points concernant la stratégie d'estimation. Tout d'abord, nous considérons un état initial volontairement éloigné de l'état initial de référence en fixant  $Q_0 = I_3$ . Nous rappelons ensuite la particularité des méthodes d'estimation combinée qui consiste à mettre en place de manière artificielle l'évolution des paramètres à l'aide d'une marche aléatoire. Cette marche aléatoire est générée à partir d'un bruit  $\mathcal{N}(0, Z)$  où  $Z = 0.001 I_3$ . Le vecteur  $\eta_t$  caractérise ce bruit à l'instant  $t$ . Enfin, le vecteur des paramètres à l'instant initial est généré aléatoirement à partir d'une distribution  $\mathcal{N}((10, 28, 8/3)^t, Z_0 = I_3)$ , c'est-à-dire lui aussi volontairement éloigné des valeurs de référence.

Le protocole de test est semblable à celui couramment employé dans la littérature. De manière générale, l'idée consiste à étudier le comportement des méthodes de filtrage en faisant varier les matrices de covariance  $Q$  et  $R$ . De cette façon, il est possible de modifier le degré de confiance accordé au modèle et celui accordé aux observations, ce qui revient en fait à pondérer

la correction. Le tableau I synthétise les différentes valeurs prises par les matrices de covariances  $Q$  et  $R$ . Cette première expérience comprend quatre tests référencés de A1 à A4. Nous proposons en outre de modifier la quantité de particules générées aléatoirement par la méthode de Monte Carlo afin de pouvoir en mesurer l'impact sur l'erreur d'estimation et sur le temps de calcul requis. L'évolution de ce nombre de tirages est détaillée dans le tableau II. Nous dénombrons quatre tests pour cette expérience, référencés de B1 à B4.

TABLE I  
INFLUENCE DES BRUITS DE MODÈLE ET DE MESURE

A1	$Q = 0,01 I_3$	$R = 0,01 I_3$
A2	$Q = I_3$	$R = 0,01 I_3$
A3	$Q = 0,01 I_3$	$R = I_3$
A4	$Q = I_3$	$R = I_3$

TABLE II  
INFLUENCE DU NOMBRE DE PARTICULES

B1	$N_t = 10$
B2	$N_t = 50$
B3	$N_t = 100$
B4	$N_t = 200$

Le filtre de Kalman d'ensemble étant une méthode de nature statistique, certains tirages peuvent favoriser plus que d'autres la convergence. Afin d'éviter ce type de situation peu propice aux comparaisons, nous considérons pour chaque méthode d'estimation testée la même séquence générée aléatoirement au préalable. Cette séquence regroupe l'ensemble des tirages aléatoires requis lors de l'estimation. De plus, chacun des tests énoncés précédemment est réitéré cent fois en générant évidemment chaque fois une nouvelle trajectoire de référence à estimer et une nouvelle séquence aléatoire pour l'estimation.

Nous observons ensuite l'évolution temporelle de la moyenne des erreurs quadratiques moyennes calculées à chaque instant d'observation entre l'état estimé et l'état de référence. Nous n'incluons pas d'étape de normalisation puisque les matrices de covariance des erreurs sont constantes au cours des 100 essais. Enfin, nous précisons également la moyenne des temps de calcul machine. Puisque ces tests sont réalisés à partir de données simulées, les observations sont toutes disponibles immédiatement lors du filtrage. Par conséquent, il est possible de constater des temps de calcul machine inférieurs à la durée réelle des simulations.

## V. RÉSULTATS

### A. Influence des bruits de modèle et de mesure

La figure 1 illustre l'influence des bruits de modèle et de mesure sur la qualité d'estimation. Les quatre graphiques répartis sur cette figure correspondent respectivement aux quatre tests du tableau I. Le nombre de tirages de Monte Carlo est fixé à  $N_t = 100$  pour garantir une bonne qualité d'estimation. En effet, l'idée consiste à considérer un cas relativement favorable afin de pouvoir mesurer au mieux l'impact des bruits de modèle et de mesure. Le test A1 correspond au cas où  $Q = 0,01 I_3$  et  $R = 0,01 I_3$ , c'est-à-dire au cas où une forte confiance est accordée à la fois au modèle dynamique et aux observations.

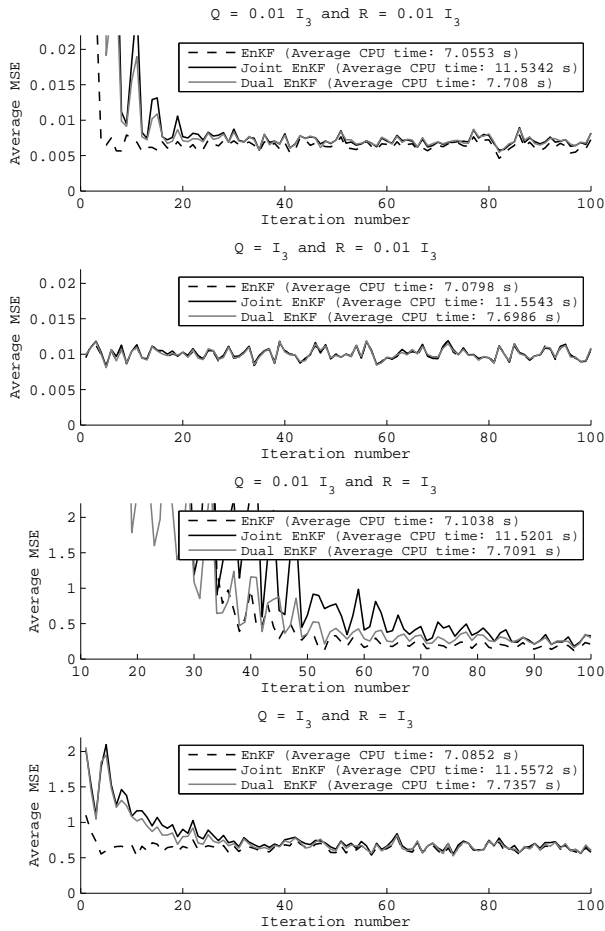


Fig. 1. Influence des bruits de modèle et de mesure sur la qualité d'estimation et sur les temps de calcul machine requis

Naturellement, le filtre de Kalman d'ensemble standard pour lequel les paramètres du modèle sont connus converge rapidement (après 4 itérations environ) et fournit une erreur quadratique moyenne entre l'état estimé et l'état de référence relativement faible (de l'ordre de  $6,5 \cdot 10^{-3}$  en moyenne). Toutefois, les deux méthodes d'estimation combinée sont satisfaisantes puisque la convergence est atteinte au bout de seulement quelques itérations supplémentaires (après 17 itérations environ) tout en disposant d'une erreur quadratique moyenne à peine plus élevée (de l'ordre de  $7 \cdot 10^{-3}$  en moyenne). Bien que les estimations jointe et duale affichent les mêmes performances en termes de qualité d'estimation, les temps de calcul machine moyens sont différents. En effet, la méthode d'estimation duale ne nécessite que 1,1 fois plus de temps que la méthode à paramètres connus, tandis que la méthode d'estimation jointe en requiert 1,6 fois plus environ.

Le test A2 fait référence au cas où  $Q = I_3$  et  $R = 0,01 I_3$ . En d'autres termes, nous n'accordons dans cette configuration que très peu de confiance au modèle dynamique. Le rapport entre les bruits d'état et de sortie est de 100, ce qui signifie un gain de Kalman fort et par conséquent des données fiables. Avec ce jeu de paramètres, nous constatons que la convergence s'effectue quasiment dès la première itération et ce pour les

trois filtres. Ce phénomène s'explique facilement par le fait que le bruit de perturbation du modèle intervenant dans l'étape de prédiction du filtre de Kalman d'ensemble est plus élevé que précédemment. Nous garantissons de cette manière une diffusion suffisante des particules, c'est-à-dire que nous parcourons plus largement l'espace d'état améliorant ainsi les chances de convergence. Les performances en termes de qualité d'estimation sont équivalentes pour les trois filtres. Toutefois, l'erreur quadratique moyenne est évidemment un peu plus élevée (de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-2}$  en moyenne) que pour le test A1 en réponse à cette augmentation du bruit de modélisation. En ce qui concerne les temps de calcul machine requis, nous conservons les mêmes rapports qu'auparavant.

Le test A3 se rapporte au cas où  $Q = 0,01 I_3$  et  $R = I_3$ , c'est-à-dire au cas où très peu de confiance est accordée aux observations. Le rapport entre les bruits d'état et de sortie est donc cette fois de 0,01. Par conséquent, il s'agit en quelque sorte de l'inverse du cas A2 puisque le gain de Kalman est très faible. Les mesures étant peu fiables, il est normal qu'elles ne modifient pas ou peu l'estimation courante. De plus, la diffusion des particules est très limitée puisque le bruit de perturbation du modèle est peu élevé. Dès lors, la convergence arrive beaucoup plus tardivement (après 55 itérations environ) et l'erreur quadratique moyenne se trouve être beaucoup plus importante (de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-1}$  en moyenne) pour le filtre de Kalman d'ensemble standard. Pour les procédures d'estimation combinée, la convergence se produit quelques itérations plus tard (après 70 itérations environ) et l'erreur quadratique moyenne est également un peu plus grande (de l'ordre de  $2,5 \cdot 10^{-1}$  en moyenne). Les temps de calcul machine requis sont toujours du même ordre de grandeur pour chacun des filtres.

Enfin, le test A4 désigne le cas où  $Q = I_3$  et  $R = I_3$ . Dans cette situation, nous n'accordons que très peu de confiance au modèle dynamique et aux observations. Par conséquent, une augmentation significative de l'erreur quadratique moyenne après convergence est observée (de l'ordre de  $6 \cdot 10^{-1}$  en moyenne). En contrepartie, nous constatons un double effet bénéfique dû à la valeur élevée du bruit de perturbation du modèle et *a fortiori* à la meilleure diffusion des particules. Tout d'abord, les performances en termes d'erreur d'estimation sont équivalentes en moyenne pour les trois filtres. Ensuite, nous distinguons de meilleures vitesses de convergence puisque le filtre de Kalman d'ensemble standard converge après seulement 4 itérations environ et les deux méthodes d'estimation combinée après 30 itérations environ. Les temps de calcul machine moyens demeurent inchangés.

Pour résumer, nous avons constaté que les deux méthodes d'estimation combinée présentent des performances semblables en termes de qualité d'estimation. Bien que contrairement au filtre de Kalman d'ensemble standard ces méthodes nécessitent d'estimer non seulement l'état du système mais également les paramètres du modèle, elles ne sont que légèrement moins performantes en moyenne dans le cas du modèle de Lorenz. En fonction de la valeur des bruits de modèle et de mesure, il est même possible d'obtenir des performances équivalentes pour ces trois méthodes de filtrage. Toutefois, la méthode d'estimation jointe nécessite un temps de calcul machine environ 1,6 fois plus long en moyenne à cause de la taille du vecteur d'état augmenté. Cette méthode semble donc à éviter lorsque le nombre de paramètres à estimer est important. Enfin, nous pouvons également affirmer que les bruits de modèle et de mesure n'ont

aucune influence sur les temps de calcul machine requis.

### B. Influence du nombre de tirages

La figure 2 représente l'influence du nombre de particules générées aléatoirement sur la qualité d'estimation. Les quatre graphiques répartis sur cette figure correspondent respectivement aux quatre tests du tableau II. En clair, les matrices de covariances des bruits de modèle et de mesure sont figées pour chacun de ces tests. Au vu des résultats précédents, nous choisissons  $Q = 0,01 I_3$  et  $R = 0,01 I_3$  de sorte que l'erreur quadratique moyenne entre l'état estimé et l'état de référence soit minimale. Nous constatons immédiatement que les tests *B2*, *B3*

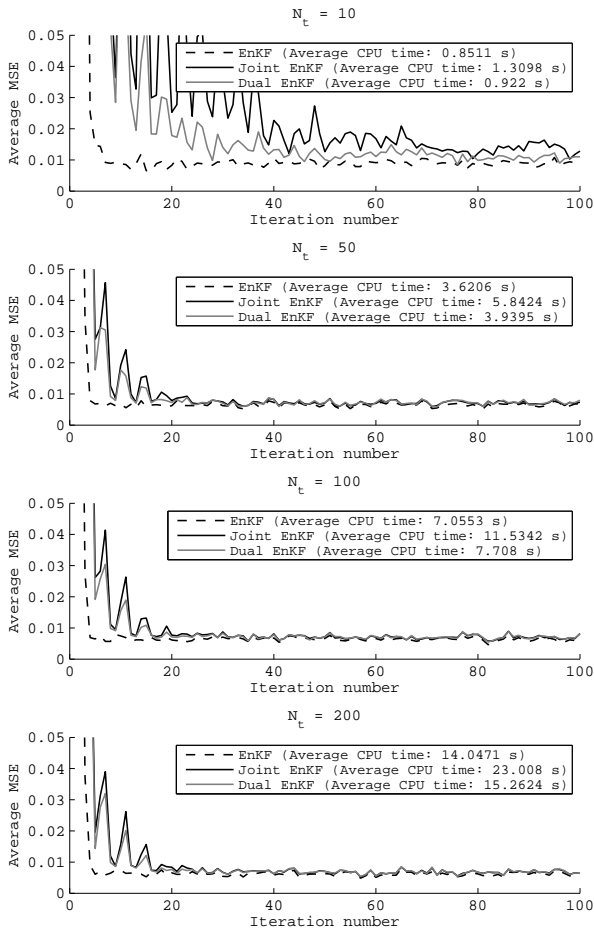


Fig. 2. Influence du nombre de particules sur la qualité d'estimation et sur les temps de calcul machine requis

et *B4* pour lesquels le nombre de particules générées vaut respectivement  $N_t = 50$ ,  $N_t = 100$  et  $N_t = 200$  affichent des performances semblables en termes de qualité d'estimation. En effet, pour chacun des trois filtres, la convergence a lieu rapidement (après 4 itérations environ pour le filtre de Kalman d'ensemble standard et après 17 itérations environ pour les deux méthodes d'estimation combinée) et l'erreur quadratique moyenne est relativement faible (de l'ordre de  $6,5 \cdot 10^{-3}$  en moyenne pour le filtre de Kalman d'ensemble standard et de l'ordre de  $7 \cdot 10^{-3}$  en moyenne pour les deux méthodes d'estimation combinée). Par conséquent, il n'est pas nécessaire de générer plus de 50 par-

ticules pour obtenir une estimation tout à fait convenable. Ce constat est intéressant, notamment en ce qui concerne le temps de calcul machine requis pour traiter toute la séquence, puisque pour  $N_t = 100$  (respectivement  $N_t = 200$ ) le temps de calcul machine moyen est environ 2 fois (respectivement 3.9 fois) plus long que pour  $N_t = 50$ .

Le test *B1* correspond au cas où  $N_t = 10$ , c'est-à-dire au cas où le nombre de particules générées aléatoirement est relativement faible. La faible exploration de l'espace d'état affecte la qualité d'estimation. En effet, nous constatons que la convergence arrive plus tardivement (10 itérations pour le filtre de Kalman d'ensemble standard, 55 itérations environ pour les deux méthodes d'estimation combinée). Nous observons aussi une erreur quadratique moyenne plus élevée (de l'ordre de  $9 \cdot 10^{-3}$  en moyenne pour le filtre de Kalman d'ensemble standard et de l'ordre de  $1,2 \cdot 10^{-2}$  en moyenne pour les deux méthodes d'estimation combinée).

### C. Influence d'une observation partielle

Nous étudions à présent le comportement du filtre de Kalman d'ensemble pour l'estimation duale lorsqu'une seule composante du vecteur d'état est observée. Pour cela, nous choisissons les matrices de covariance des bruits de modèle et de mesure telles que  $Q = 0,1 I_3$  et  $R = 0,1 I_3$ . En ce qui concerne les matrices de covariance initiales, nous prenons  $Q_0 = 100 I_3$  et  $Z_0 = 100 I_3$ . Le filtrage démarre avec des paramètres initiaux assez éloignés des valeurs réelles afin d'obtenir un scénario relativement défavorable à l'estimation. Le nombre de tirages de Monte Carlo vaut  $N_t = 100$  et nous décidons d'observer la composante selon  $x$  du vecteur d'état en supposant le système observable avec cette seule sortie. La figure 3 illustre l'évolution temporelle des trois composantes du vecteur d'état. Les trois graphiques de gauche correspondent au cas où toutes les composantes du vecteur d'état sont observées et ceux de droite au cas où seule la composante  $x$  est observée. De même, la figure

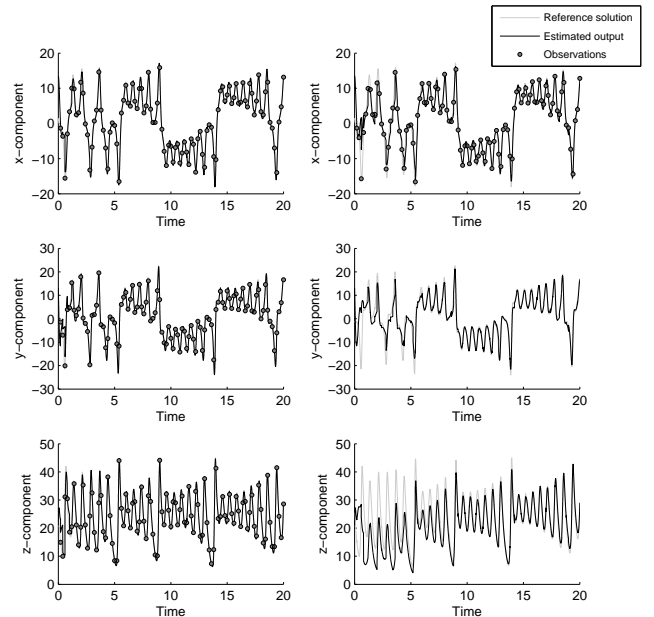


Fig. 3. Influence du nombre de composantes du vecteur d'état observées sur la qualité d'estimation

4 représente l'évolution des paramètres du modèle de Lorenz

dans les même conditions que précédemment. Dans le cas où

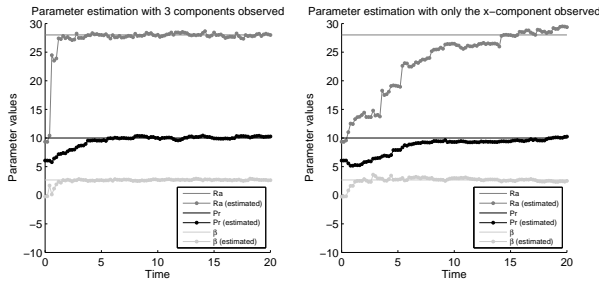


Fig. 4. Influence du nombre de composantes observées sur la vitesse de convergence des paramètres

toutes les composantes sont observées, les trois paramètres du modèle de Lorenz convergent relativement rapidement vers leur valeur de référence. En effet, la convergence est atteinte après 15 itérations environ pour  $Ra$ , après 30 itérations environ pour  $Pr$  et après 10 itérations environ pour  $\beta$ . Cette convergence rapide des paramètres du modèle permet à chacune des composantes estimées de tendre très rapidement vers sa valeur de référence (après 25 itérations environ pour les trois composantes). En revanche, dans le second cas, les trois paramètres du modèle de Lorenz convergent lentement : 70 itérations environ pour  $Ra$ , 90 itérations environ pour  $Pr$  et 10 itérations environ pour  $\beta$ . Corollairement, cela ralentit la convergence des paramètres vers leur valeur de référence : 30 itérations environ pour la composante selon  $x$ , 45 itérations environ pour la composante selon  $y$  et 70 itérations environ pour la composante selon  $z$ . Naturellement, la composante observée tend le plus rapidement vers la valeur de référence (figure 3). Bien que les performances en termes de vitesse de convergence et d'erreur d'estimation paraissent moins bonnes dans cette situation, ce résultat est plutôt encourageant.

## VI. CONCLUSION

Nous avons pu constater que les procédures d'estimation jointe et duale fournissent des performances similaires en termes de vitesse de convergence et d'erreur d'estimation. Néanmoins, il en va autrement en ce qui concerne les temps de calcul puisque la méthode d'estimation jointe nécessite plus de temps en moyenne que la méthode d'estimation duale. Cet écart est liée à la dimension plus élevée du vecteur d'état augmenté. Une autre difficulté est surmontée. En mettant en place deux filtres, la méthode d'estimation duale permet de restreindre le nombre de degrés de liberté et évite l'allongement du temps de convergence. Enfin, bien que la qualité d'estimation du filtre de Kalman d'ensemble dual soit tout à fait convenable (même pour un nombre d'observations réduit), la gestion des bruits de perturbation reste encore délicate. En effet, un bruit de perturbation peu élevé a tendance à ralentir la vitesse de convergence en limitant la diffusion des particules. A l'inverse, un bruit de perturbation élevé améliore sensiblement la vitesse de convergence, mais accentue la variance de l'erreur d'estimation. L'expert se voit donc contraint de réaliser un compromis entre la vitesse de convergence et la précision souhaitée, et ce de manière empirique.

## RÉFÉRENCES

[1] Bras R. L. et Rodriguez-Iturbe I. *Random functions and hydrology*. Dover Publications, 1994.  
 [2] Zheng D. Q., Leung J. K. C. et Lee B. Y. Online update of model state and parameters of Monte Carlo atmospheric dispersion model by using en-

semble Kalman filter. *Atmospheric Environment*, vol. 43, no 12, pp. 2005-2011, 2009.  
 [3] Todini E., Szollosi-Nagy A. et Wood E. F. Adaptive state-parameter estimation algorithm for real time hydrologic forecasting : a case study. Dans *Proceedings of the IISA/WMO Workshop on the Recent Developments in Real Time Forecasting/Control of Water Resources Systems*, Laxemburg, Austria, 1976.  
 [4] Todini E. Mutually interactive state-parameter (MISP) estimation : application of Kalman filter to hydrology, hydraulic and water resources. Dans *Proceedings of the AGU Chapman Conference*, Pittsburg, Pennsylvania, USA, 1978.  
 [5] Jazwinski A. H. *Stochastic processes and filtering theory*. Academic Press, 1970.  
 [6] Wan E. A. et Nelson A. T. Dual Kalman filtering methods for nonlinear prediction, smoothing and estimation. *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. 9, pp. 793-799, 1996.  
 [7] Nelson A. T. Nonlinear estimation and modeling of noisy time-series by dual Kalman filtering methods. Thèse de doctorat, Oregon Graduate Institute of Science & Technology, 2000.  
 [8] Evensen G. Using the extended Kalman filter with a multilayer quasi-geostrophic ocean model. *Journal of Geophysical Research*, vol. 97, no C11, pp. 17905-17924, 1992.  
 [9] Evensen G. Sequential data assimilation with a nonlinear quasigeostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. *Journal of Geophysical Research*, vol. 99, no C5, pp. 10143-10162, 1994.  
 [10] Miller R. N., Ghil M. et Gauthiez F. Advanced data assimilation in strongly nonlinear dynamical systems. *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 51, no 8, pp. 1037-1056, 1994.  
 [11] Gelb A., Kasper J. F., Nash R. A., Price C. F. et Sutherland A. A. *Applied optimal estimation*. The M.I.T. Press, 1974.  
 [12] Julier S. J. et Uhlmann J. K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems. Dans *Proceedings of the SPIE 11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls*, Orlando, Florida, USA, 1997.  
 [13] Burgers G., van Leeuwen J. et Evensen G. Analysis scheme in the ensemble Kalman filter. *Monthly Weather Review*, vol. 126, no 6, pp. 1719-1724, 1998.  
 [14] Evensen G. The ensemble Kalman filter : theoretical formulation and practical implementation. *Ocean Dynamics*, vol. 53, no 4, pp. 343-367, 2003.  
 [15] Kotecha J. H. et Djuric P. M. Gaussian particle filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 51, no 10, pp. 2592-2601, 2003.  
 [16] Reichle R. H., McLaughlin D. B. and Entekhabi D. Hydrologic data assimilation with the ensemble Kalman filter. *Monthly Weather Review*, vol. 130, no 1, pp. 103-114, 2002.  
 [17] Houser P. R., Koster R. D., Reichle R. H. et Walker J. P. Extended versus ensemble Kalman filtering for land assimilation. *Journal of Hydrometeorology*, vol. 3, no 6, pp. 728-740, 2002.  
 [18] Tran V. D., Monbet V. et Le Gland F. Filtre de Kalman d'ensemble et filtres particuliers pour le modèle de Lorenz. Dans *Proceedings of the MajecSTIC Conference*, Lorient, France, 2006.  
 [19] Gillijns S., Barrero Mendoza O., Chandrasekar J., de Moor B. L. R., Bernstein D. S. et Ridley A. What is the ensemble Kalman filter and how well does it work ? Dans *Proceedings of the American Control Conference*, Minneapolis, Minnesota, USA, 2006.  
 [20] Coman A. Modélisation spatio-temporelle de la pollution atmosphérique urbaine à partir des mesures d'un réseau de surveillance de la qualité de l'air. Thèse de doctorat, Université de Paris XII, 2008.  
 [21] Moradkhani H., Sorooshian S., Gupta H. V. et Houser P. R. Dual state-parameter estimation of hydrological models using ensemble Kalman filter. *Advances in Water Resources*, vol. 28, no 2, pp. 135-147, 2005.  
 [22] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, no 2, pp. 130-141, 1963.  
 [23] Evensen G. Advanced data assimilation for strongly nonlinear dynamics. *Monthly weather review*, vol. 125, no 6, pp. 1342-1354, 1997.  
 [24] Pham D. T. Stochastic methods for sequential data assimilation in strongly nonlinear systems. *Monthly weather review*, vol. 129, no 5, pp. 1194-1207, 2001.  
 [25] Tran V. D. Assimilation de données : les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman d'ensemble. Thèse de doctorat, Université de Bretagne Sud, 2009.