Fiche TP 08 :
Principe d'induction

Licence 2 MASS semestre 2, 2007/2008

Exercice 1 : Ensembles définis inductivement

Donner l'écriture en extension des ensembles suivants définis inductivement puis, démontrer vos affirmations.

a. Le sous-ensemble A des entiers définis par :
   - base : $1 \in A$
   - induction : si $a \in A$ alors $5a \in A$

b. Le sous-ensemble B des entiers définis par :
   - base : $\{2, 3\} \subset B$
   - induction : si $a \in B$ et $b \in B$ alors $ab \in B$

Exercice 2 : Définition inductive sur les mots

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de lettres appelé alphabet.
Une définition inductive de l'ensemble des mots M contruit sur $\mathcal{A}$.

- base (mot vide) : $\epsilon \in \mathcal{M}$
- induction : si $m \in \mathcal{M}$ et $a \in \mathcal{A}$ alors $a.m \in \mathcal{M}$.

Questions :

a. Donner des exemples de mots lorsque $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$.

b. Définir inductivement l'ensemble des mots $M = \{a^k b^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3 : Terminaison d'algorithme récursif

Nous rappelons la définition inductive de l'ensemble des listes construites sur un alphabet $\mathcal{A}$

- $B = \{\epsilon\}$
- $F = \{ajout_e \mid e \in \mathcal{A} \text{ et } ajout_e(l) = (e, l)\}$

Soit l'algorithme récursif qui calcule la longueur d'une liste :

```
Algorithme  longueur(l : liste) : entier
début
  si listeEstVide?(l) alors
    retourner  0
  sinon
    retourner 1 + longueur( listeQueue( l ) )
  fin si
fin
```

- Montrer par induction que l'algorithme de termine.

Exercice 4 : Définition inductive de fonctions

Il est aussi possible de définir inductivement des fonctions définies sur un ensemble inductif.
Par exemple, la fonction **longueur** qui calcule la longueur d'une liste se définie par :

- base : $longueur(\epsilon) = 0$
- induction : si $e \in \mathcal{A}$ et $l \in L$ alors $f(ajout_e(l)) = 1 + longueur(l)$

Questions :

a - Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $longueur((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = n$.
Pour $n = 0$, nous considérerons que la liste est la liste vide.

b - Définir inductivement la fonction *concat* qui calcule la concaténation de deux listes.

c - Montrer que $\forall l \in L$ et $\forall m \in L$, $concat(l, m) = (l.m)$.

Exercice 5 : Arbre binaire

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet.
Une définition inductive de l'ensemble des arbres binaires $\mathcal{T}$ contruit sur $\mathcal{A}$.

- base (arbre vide) : $\epsilon \in \mathcal{T}$
- induction : si $g \in \mathcal{T}$, $d \in \mathcal{T}$ et $a \in \mathcal{A}$ alors $(a, g, d) \in \mathcal{T}$.

Questions :

a - Donner des exemples d'arbres binaires lorsque $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$.

b - Définir inductivement les fonctions donnant la hauteur, le nombre de feuilles et le nombre de noeuds d'un arbre binaire.

c - Montrer que :
$\forall x \in \mathcal{T}$, $noeuds(x) \leq 2^{hauteur(x)} - 1$ et $feuilles(x) \leq 2^{hauteur(x)-1}$.