

# Percolation

Licence 2 et 3 - Introduction aux systèmes complexes

Sébastien Verel  
verel@i3s.unice.fr  
[www.i3s.unice.fr/~verel](http://www.i3s.unice.fr/~verel)  
[www.i3s.unice.fr/tea](http://www.i3s.unice.fr/tea)

Équipe ScoBi - Université de Nice Sophia Antipolis

7 avril 2009

# Plan

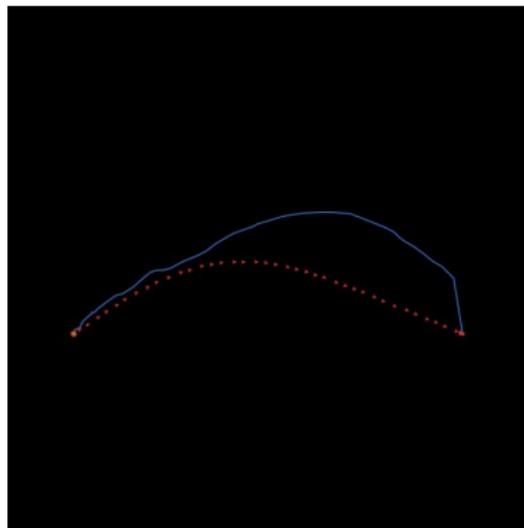
- 1 Percolation
- 2 Expérimentation

# L'aventure "introduction aux systèmes complexes"

- cm01 : Introduction

- Decartes : démarche analytique
- SC : Le Tout est plus que l'ensemble de ses Parties.

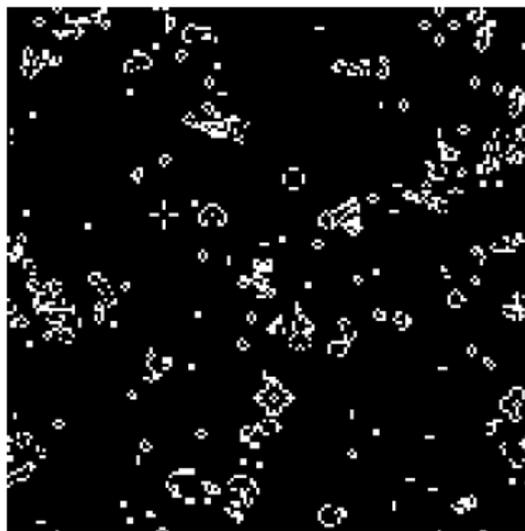
- cm02 : NetLogo



le monde des Patches, Turtles et Links.

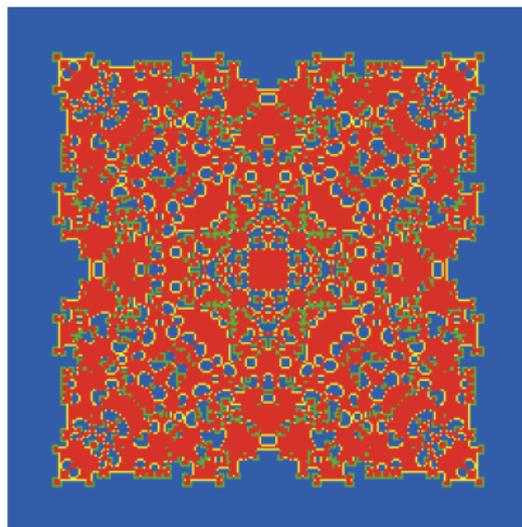
# L'aventure "introduction aux systèmes complexes"

- cm03 : Automate cellulaire



Modèle de SC discret le plus simple

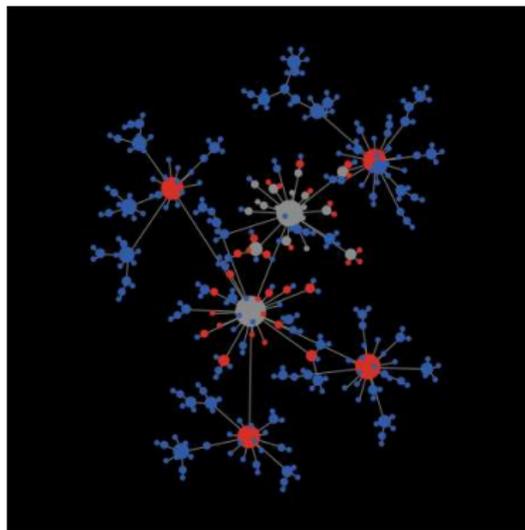
- cm04 : Théorie des jeux : jeux évolutionnistes et spatiaux



Dilemme du prisonnier, dilemme social

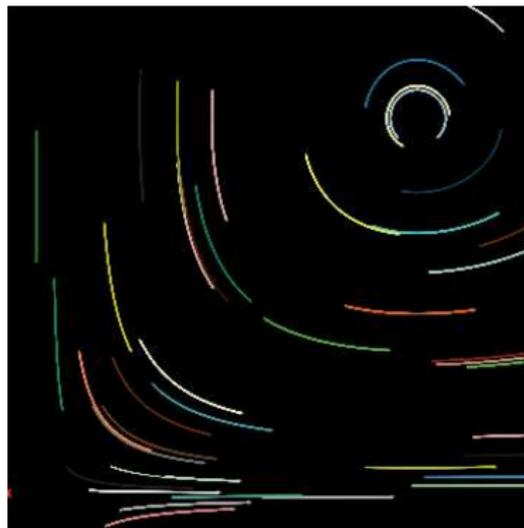
# L'aventure "introduction aux systèmes complexes"

- cm05 : Réseaux sociaux



Petit monde, monde sans échelle,  
propagation virale

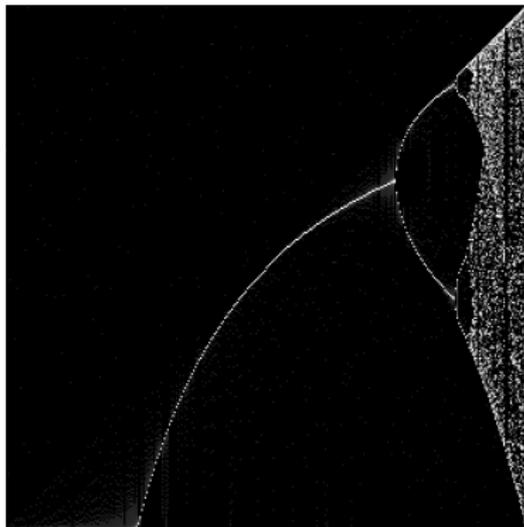
- cm06 : Dynamique des population :  
proies/prédateurs



Le thon rouge de méditerranée...

# L'aventure "introduction aux systèmes complexes"

- cm07 : Equation logistique



Convergence, cycle, chaos  
déterministe

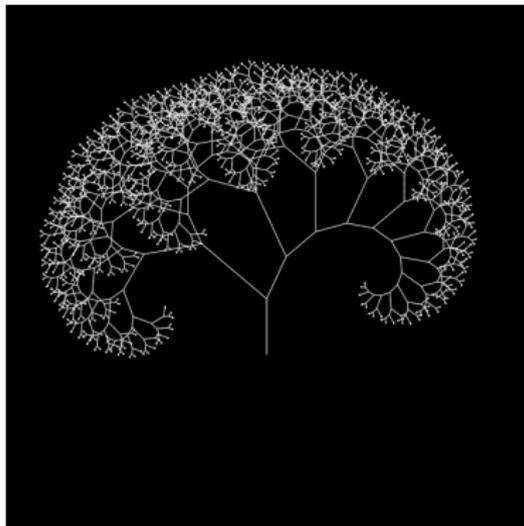
- cm08 : Morphogénèse



Création des formes,  
réaction-diffusion, taches

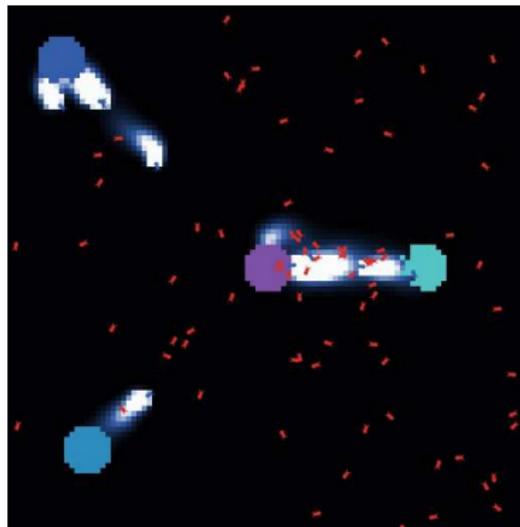
# L'aventure "introduction aux systèmes complexes"

- cm09 : L-systems et fractale



Autosimilarité,

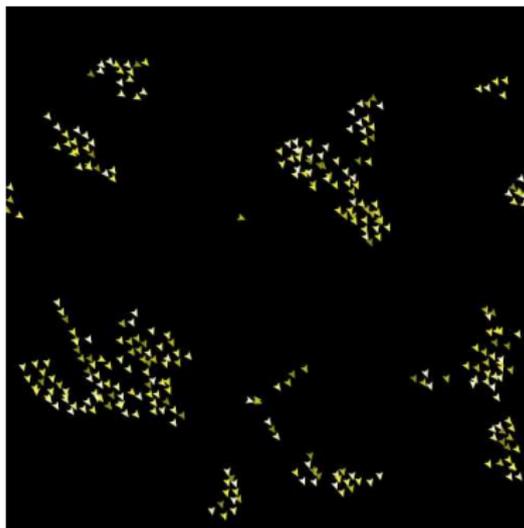
- cm10 : Colombie de fourmis



Comportement collectif de  
recherche optimal

# L'aventure "introduction aux systèmes complexes"

- cm11 : Optimisation par essaim particulaire



Optimisation par comportement suiveur local

- cm12 : Percolation et expérimentation



Le seuil critique du café et du masque à gaz

## Bibliographie principale

Percolation et économie, *thèse de doctorat*, Stéphane Pajot, 2001.

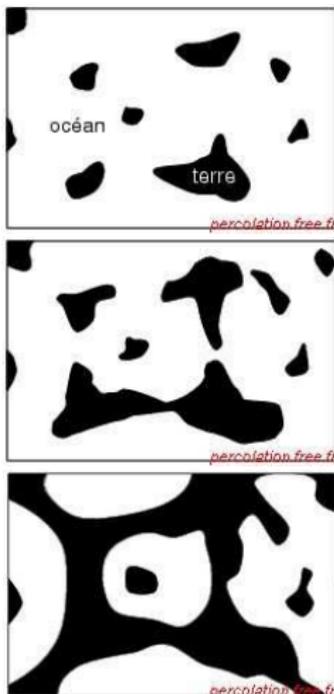
# Exemples



- **Masque à gaz** : constitué granules de carbone poreux. Réseau aléatoire de petits tunnels interconnectés.
  - Pores larges : gaz passe à travers
  - Pores trop petits : plus de traversé
- **Café** : serrage plus au moins fort du filtre. Agglomérat de fines particules (milieu aléatoire inhomogène)  
Densité à laquelle l'eau ne passe plus

→ Seuil de percolation

## Exemples



- Archipel au continent : baisse du niveau de l'eau
  - Réseau de communication :  $n$  stations reliées avec une probabilité  $p$
  - Mélange de 2 poudres : proportion  $p$  de poudre conductrice,  $1 - p$  de non-conductrice
- Seuil critique de percolation

# Définition

## 1954, Broadbent

utilisation des méthodes de Monte-Carlo pour analyser la pénétration d'un fluide dans un labyrinthe de passage ouvert ou fermé

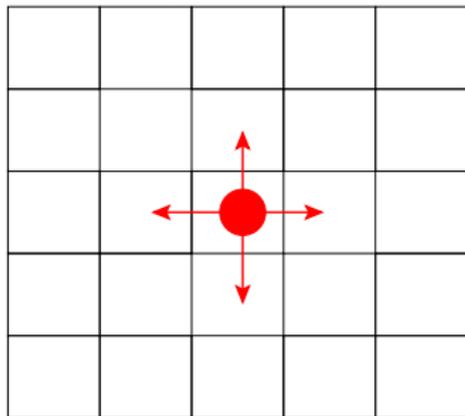
- Terminologie (en référence au café) 1957 : S.R. BROADBENT et J.M. HAMMERSLEY :  
Modèle dual de la diffusion

Processus de propagation aléatoire d'un fluide à travers un milieu

	Diffusion	Percolation
Mouvement du fluide	aléatoire	déterministe
Structure du milieu	déterministe	aléatoire

## Dualité diffusion/percolation

Diffusion

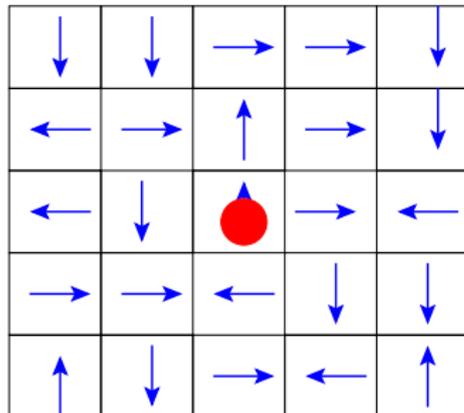


$$p=1/4$$



milieu déterministe,  
déplacement aléatoire

Percolation



milieu aléatoire,  
déplacement déterministe

# Problème de transmission

## problème de transmission

- milieu étendu
- distribution régulière d'un grand nombre de "sites"
- susceptibles de relayer localement une information
- communication entre sites : liens d'efficacité aléatoire

Selon la proportion de liaisons actives :

- possibilité ou non de transmission information à longue distance
- $p_c$  seuil de percolation

# Problème de transmission

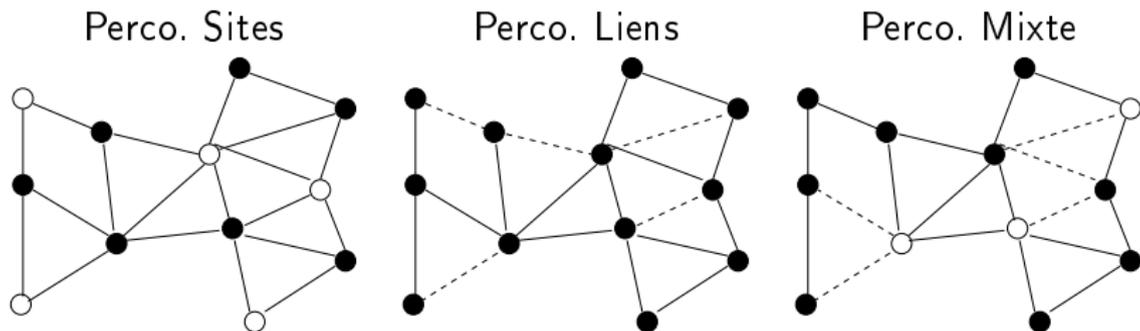
## percolation repose sur 3 hypothèses

- phénomène étudié dans un espace contenant un grand nombre d'éléments
- relation entre les éléments repose sur un aspect local
- relation entre les éléments a un caractère aléatoire

Phénomène critique au niveau **global** :

- $p < p_c$  : information limitée à un espace réduit
- $p_c < p$  : information "percole" à travers le milieu

## Types de percolation



Exemple d'un réseau de communication

# Percolation de Sites



## Percolation de Sites

Graphe  $G = (V, E)$  : ensemble infini de noeuds et arcs

- Chaque **sommet** à l'un des 2 états possibles : 0/1, actif/inactif, conducteur/non cond.
- Probabilité  $p^s$  d'être dans l'état 1

## Chemin conducteur entre $S_a$ et $S_b$

S'il existe une suite  $(S_1 = S_a, \dots, S_n = S_b)$  de sites actifs voisins

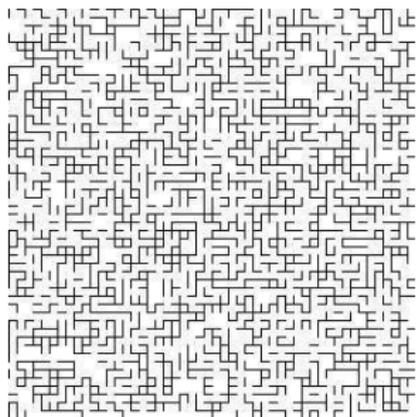
# Percolation de Sites



## Amas

deux sites appartiennent au même **amas** s'il existe au moins un chemin conducteur entre eux

# Percolation de Liens



## Percolation de Liens

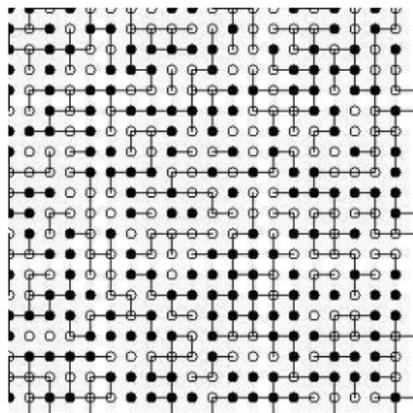
Graphe  $G = (V, E)$  : ensemble infini de noeuds et arcs

- Chaque arc à l'un des 2 états possibles : 0/1, actif/inactif, conducteur/non cond.
- Probabilité  $p^b$  d'être dans l'état 1

## Chemin conducteur entre $S_a$ et $S_b$

S'il existe une suite  $(S_1 = S_a, \dots, S_n = S_b)$  de sites reliés par des arcs actifs

# Percolation Mixte



Nombreux type de réseaux :  
hexagonal, triangulaire, etc.

## Percolation Mixte $P(p^s, p^b)$

Graphe  $G = (V, E)$  : ensemble infini de noeuds et arcs

- Chaque **sommet** à l'un des 2 états possibles : 0/1, actif/inactif, conducteur/non cond.
- Chaque **arc** à l'un des 2 états possibles : 0/1, actif/inactif, conducteur/non cond.
- Probabilité  $p^s$  d'être dans l'état 1
- Probabilité  $p^b$  d'être dans l'état 1

# Seuil de percolation

## Définition

Dans réseau avec une probabilité  $p$  de sites (ou liens) actifs.  
Concentration  $p$  à laquelle un amas de taille infinie apparaît dans un réseau de taille infinie

- $p \geq p_c$  une chaîne s'étend d'un côté à l'autre du système (percolation)
- $p < p_c$  aucun chemin de ce type

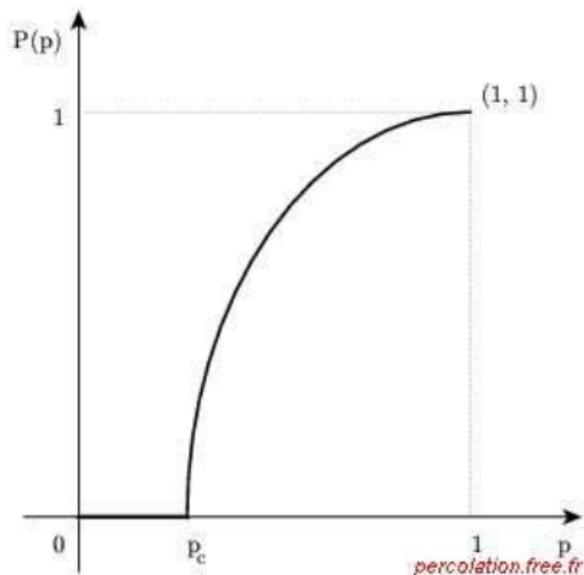
## Définition

$$p_c = \sup\{p \mid P(p) = 0\}$$

avec  $P(p)$  probabilité de percolation pour la densité  $p$

# Seuil de percolation

Phénomène critique :  
transition de phase



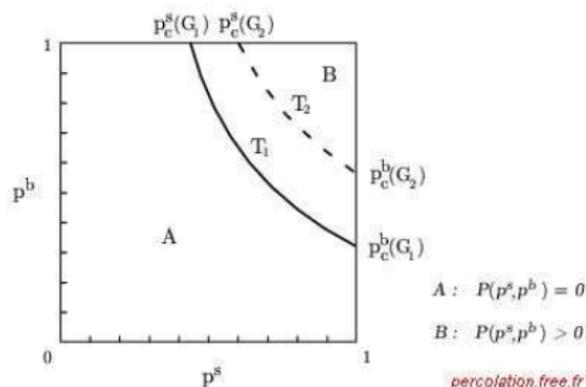
## Définition

$$p_c = \sup\{p \mid P(p) = 0\}$$

avec  $P(p)$  probabilité de  
percolation pour la densité  $p$

## Seuil de percolation : exemple percolation mixte

Phénomène critique :  
transition de phase

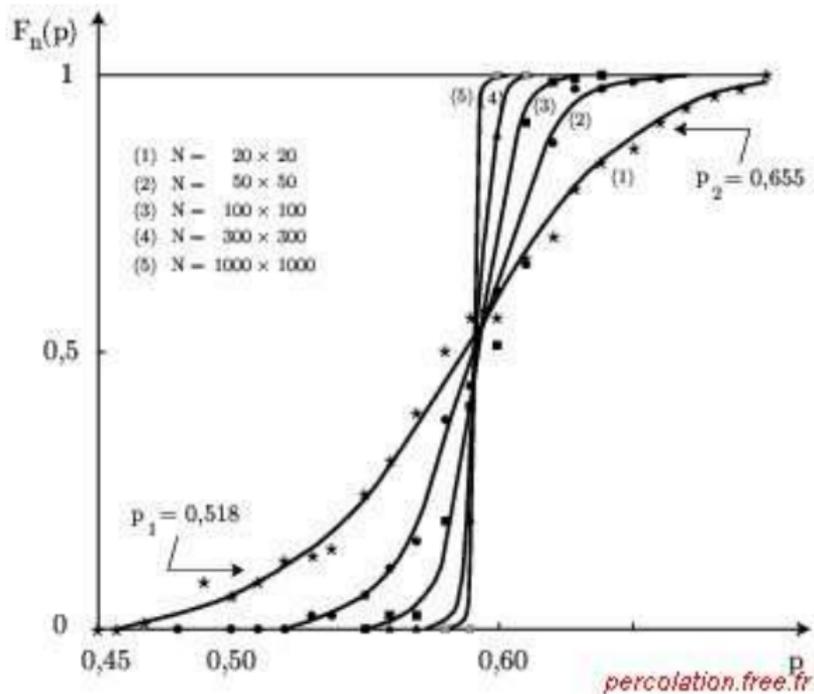


## Définition

$$p_c = \sup\{p \mid P(p) = 0\}$$

avec  $P(p)$  probabilité de  
percolation pour la densité  $p$

## Effet de la taille finie



- Mesure sur un grand nombre d'instances
- Calculs statistiques : moyenne et l'écart type pour chaque

## Série d'expériences

Experiment

Experiment name

Vary variables as follows (note brackets and quotation marks):

Either list values to use, for example:  
["my-slider" 1 2 7 8]  
or specify start, increment, and end, for example:  
["my-slider" 0 1 10] (note additional brackets)  
to go from 0, 1 at a time, to 10.  
You may also vary max-pxcor, min-pxcor, max-pycor, min-pycor, random-seed.

Repetitions   
run each combination this many times

Measure runs using these reporters:

one reporter per line; you may not split a reporter  
across multiple lines

Measure runs at every step  
if unchecked, runs are measured only when they are over

Setup commands:

Go commands:

Stop condition:

Final commands:

the run stops if this reporter becomes true

run at the end of each run

Time limit   
stop after this many steps (0 = no limit)

- Menu Tools, puis BehaviorSpace
- Documentation : <http://ccl.northwestern.edu>  
puis dans le frame de gauche dans la partie Features, choisir controlling.

## BehaviorSpace : xml

```
<experiments>
  <experiment name="experiment" repetitions="10"
              runMetricsEveryStep="true">
    <setup>setup</setup>
    <go>go</go>
    <exitCondition>not any? fires</exitCondition>
    <metric>burned-trees</metric>
    <enumeratedValueSet variable="density">
      <value value="40"/>
      <value value="0.1"/>
      <value value="70"/>
    </enumeratedValueSet>
  </experiment>
</experiments>
```