INTRODUCTION AUX SYSTÈMES COMPLEXES

Problématique

- Il existe dans la nature un grand nombre de phénomènes dont l'évolution à long terme échappe à toute prévision fiable
- Le bulletin météo en offre un exemple quotidien
- La théorie du chaos nous aide à comprendre les limites du pouvoir prédictif de la science

Systèmes Dynamiques Complexes

- Évolution temporelle déterminée par un ensemble de *règles*
- L'état *présent* détermine entièrement le *futur*
- Règles généralement *non-linéaires*
- Il peut exister de plusieurs variables en interaction

Exemple De Systèmes Dynamiques

- Système solaire
- Atmosphère (climat)
- Économie (marché, …)
- Corps humain (cœur, cerveau, …)
- Écologie (population)
- Propagation des épidémies
- Internet

…

Comment l'itération d'une équation très simple peut-elle produire un comportement complexe ?

$$f(x) = k.x^2 - 1$$

1. Fixer la valeur du paramètre **k**
2. Choisir un point initial **x**[0]
3. Appliquer répétitivement l'équation **f**

orbite **x**[0],**x**[1],**x**[2], ... du point initial point :

$$x[0]$$

$$x[1] = f(x[0])$$

$$x[2] = f(x[1]) = f(f(x[0]))$$

$$x[3] = f(x[2]) = f(f(f(x[0])))$$

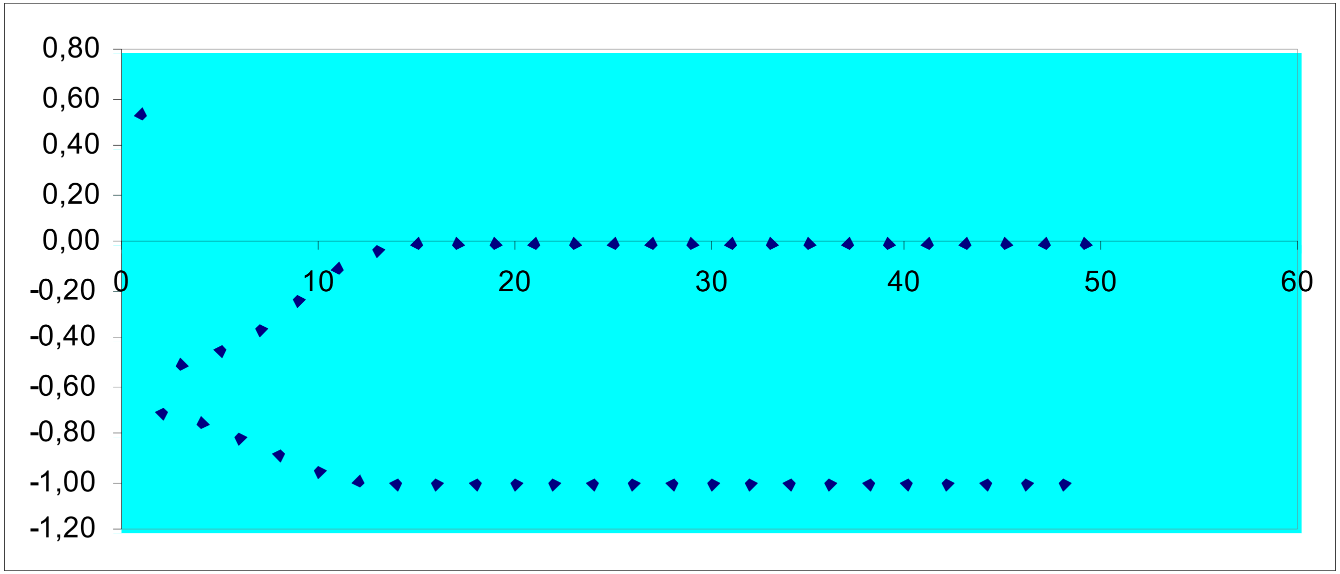
$$\ldots\ x[n] = f(x[n-1]) = f(f(\ldots\ldots f(f(x[0]))\ldots)$$

Out of Order, Chaos

itération de $f(x) = k.x^2 - 1$

<u>Expérience 1</u> : k = 1, valeur initiale x_0 = 0.5432

X^2-1



cycle de période 2

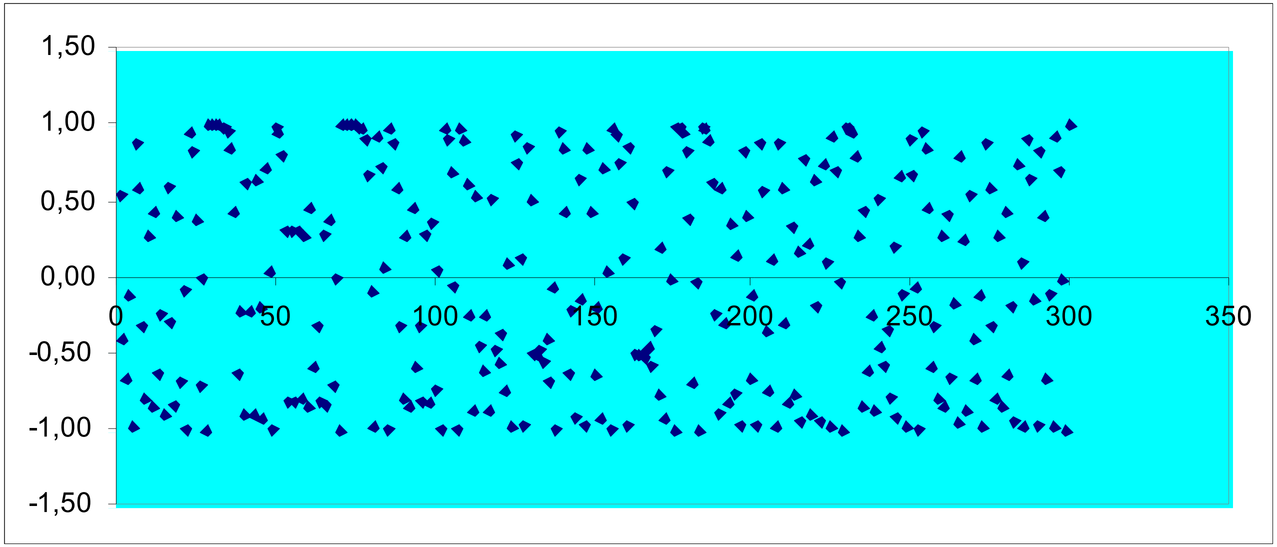
Out of Order, Chaos

itération of k.x² -1

<u>Expérience 2</u> : paramètre k = 2, valeur initiale x_0 = 0.5432

$2x^2 - 1$

Comportement à long terme *imprédictible*



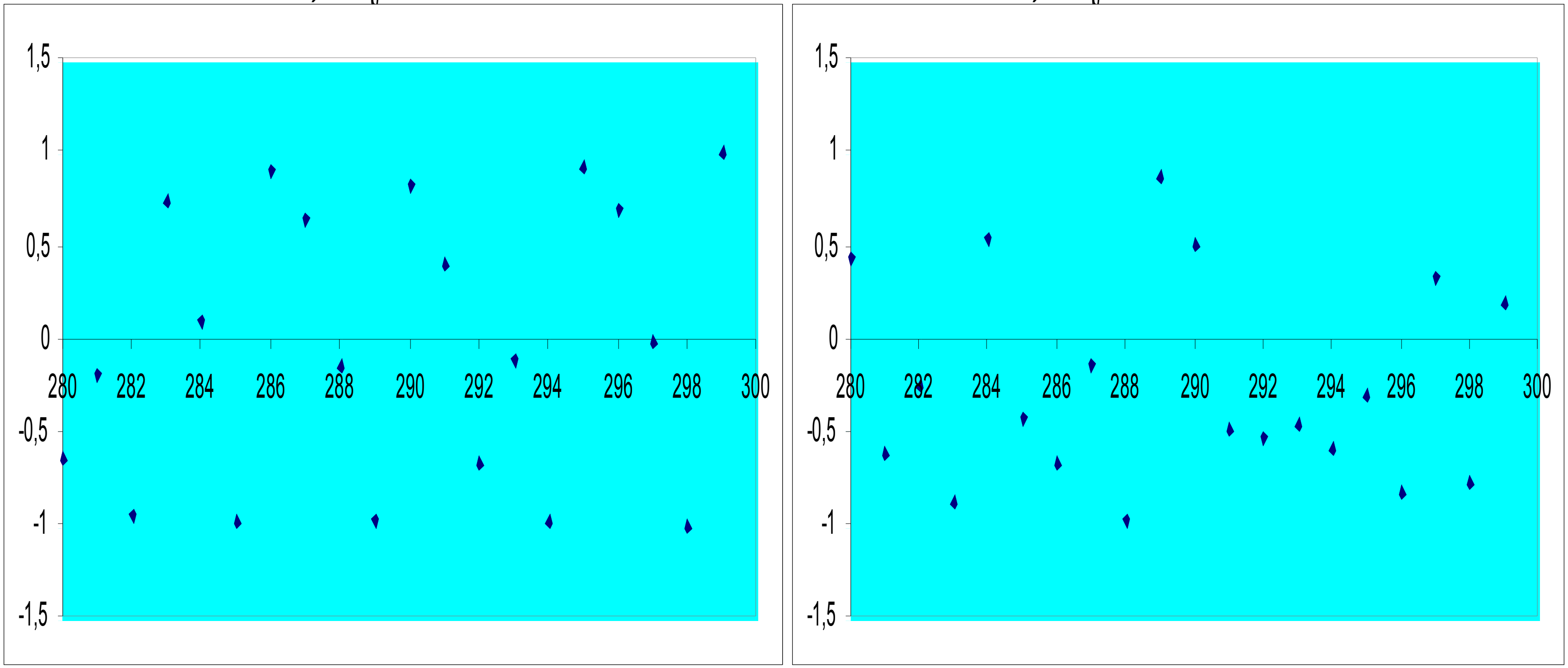
chaos déterministe

Effet papillon (Butterfly effect)

chaos = S.C.I

<u>Expérience 3</u> : Sensibilité aux Conditions Initiales

$2x^2-1$, $x_0 = 0.5432000$ $2x^2-1$, $x_0 = 0.5432001$

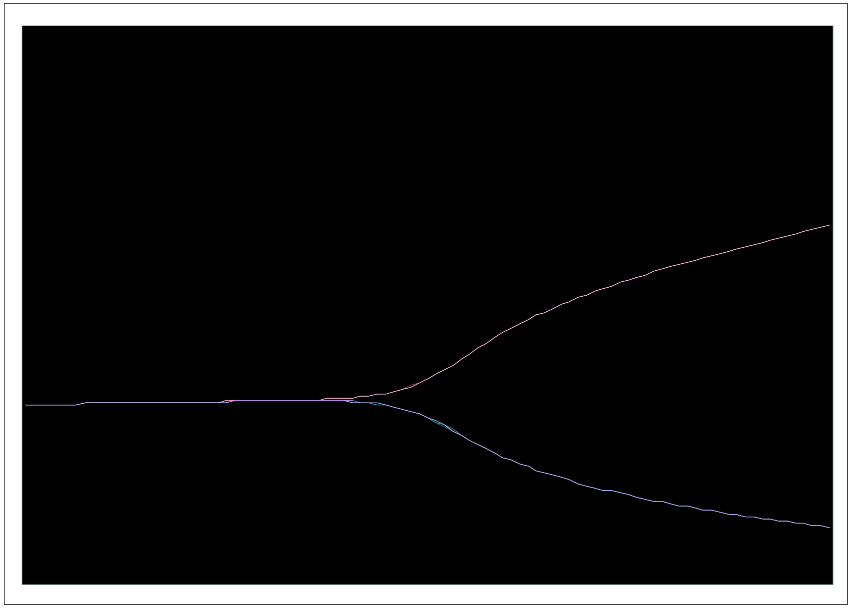


At the Edge of Order

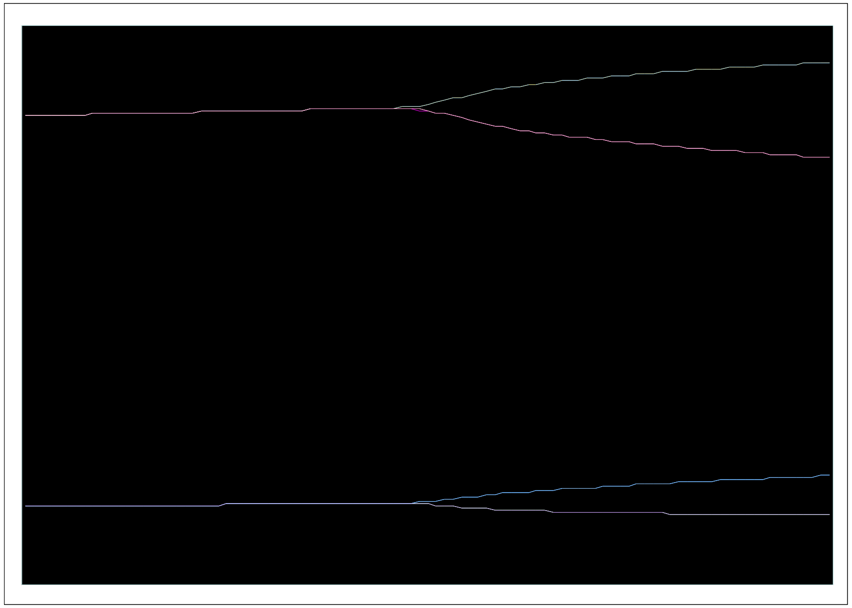
Transitions Vers le chaos

Itération de **$k.x^2-1$** : Comportement limite en fonction de **k** (x_0=0.5432)

$0.7 < k < 0.8$



$1.2 < k < 1.3$

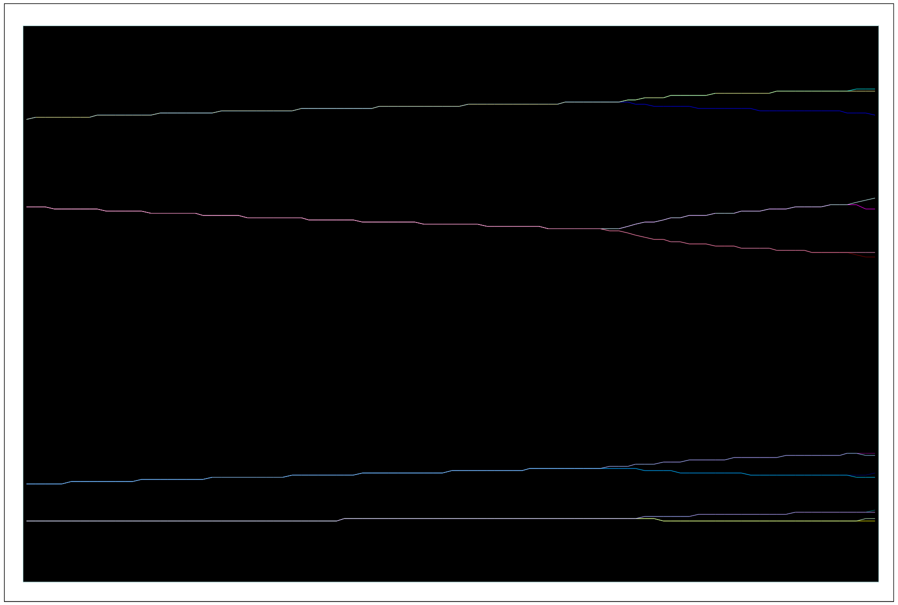


At the Edge of Order

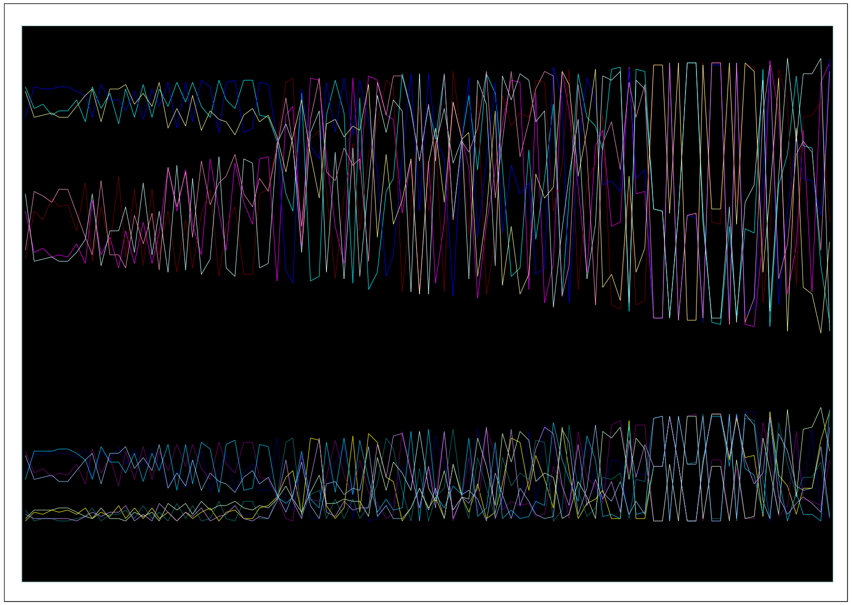
Transitions Vers le chaos

itération de **$k.x^2 - 1$** : Comportement limite en fonction de k (x_0=0.5432)

1.3 < k < 1.4



1.4 < k < 1.5



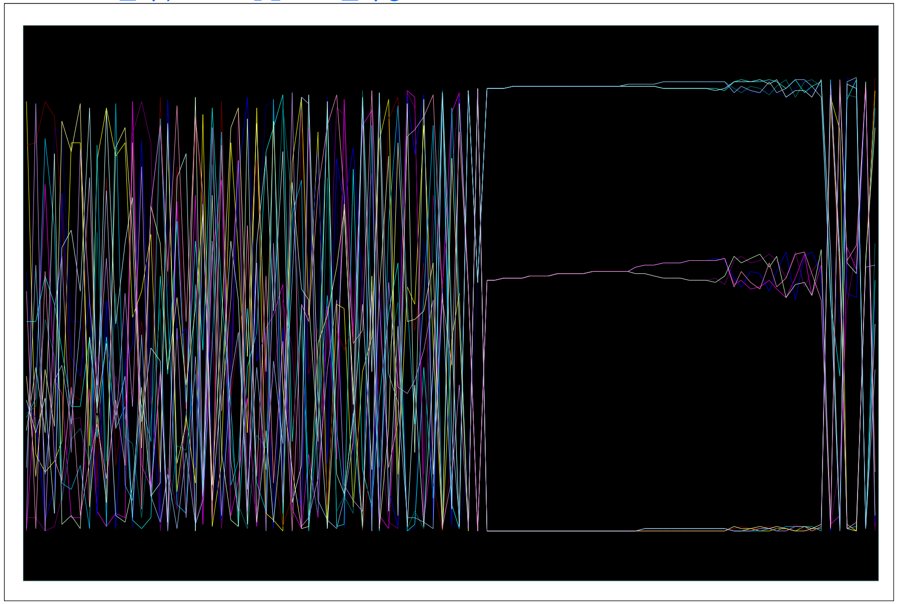
At the Edge of Order

Transitions Vers le chaos

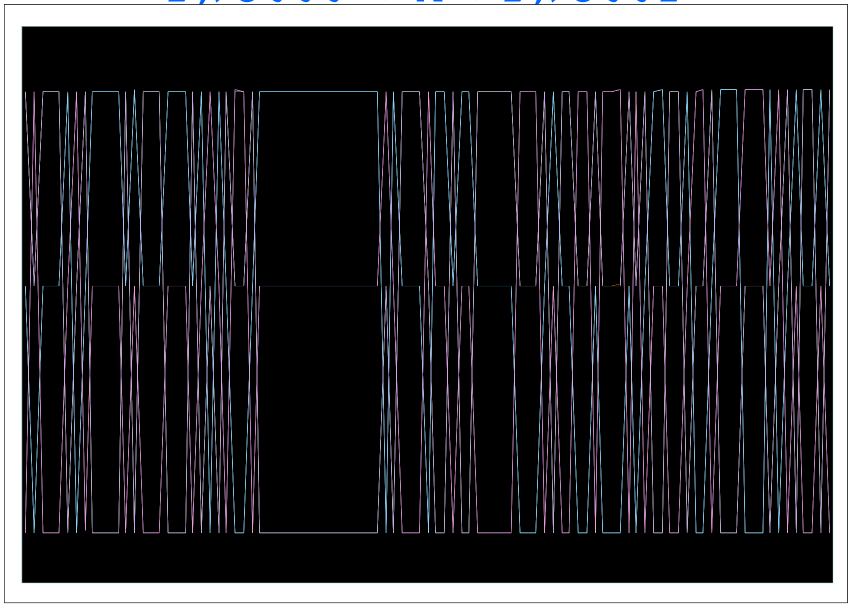
itération de $k.x^2-1$

Comportement limite en fonction de k (x_0=0.5432)

1.7 < k < 1.8



1,75000 < k < 1,75001



Attention, ce mot qui vous est familier ne signifie pas ce qu'il dit !

- Du grec Khaos : *immensité de l'espace*
- Théologie païenne : « *confusion générale des éléments avant leur séparation et leur arrangement en vue de la formation du monde* »
- Dans la Genèse : traduction du terme hébreux *tohu-wa-bohu*, le vague et le vide
- Henri Poincaré (1854-1912) : « … *la mécanique céleste reculait parce qu'elle n'y voyait que le chaos* »

Attention, ce mot qui vous est familier ne signifie pas ce qu'il dit !

- Ne se répète jamais
- Sensible aux Conditions Initiales (Butterfly effect)
- Prédictions à ~~court terme~~ mais pas à long terme
- Engendre souvent des structures fractales

Ne pas confondre Chaos et aléatoire

- **Aléatoire**
  - Non reproductible
  - Imprédictible
- **Chaos**
  - Déterministe (les mêmes conditions initiales conduisent au même comportement limite)
  - Mais des C.I voisines conduisent à des comportements très différents
  - Difficile ou impossible de faire des prédictions

Déterministe et de prévisibilité à long terme

- Laplace (1825)

  « Les <u>mêmes</u> causes produisent les <u>mêmes</u> effets »

  « Des causes <u>similaires</u> produisent des effets <u>similaires</u> » ?

- Maxwell (1831-1879)

  « Ceci est vrai seulement lorsque des petites variations dans les conditions initiales produisent seulement des petites variations dans les états finaux du système »

Equation Logistique

- L'équation logistique modélise l'évolution d'une population animale
- L'augmentation de la population sera une fraction de la population présente
- A_n le nombre d'animaux une année et A_{n+1} le nombre d'animaux l'année suivante

  $$A_{n+1} = R.A_n$$
- Où R est le facteur de fécondité
  - R constant est peut raisonnable car on aboutit à une explosion exponentielle de la population

Équation Logistique

- On considère que le taux de croissance R diminue avec l'augmentation de la population (la quantité de nourriture disponible pour chaque animal diminue quand la population croît)

$$R = r.(1 - A_n/Amax)$$

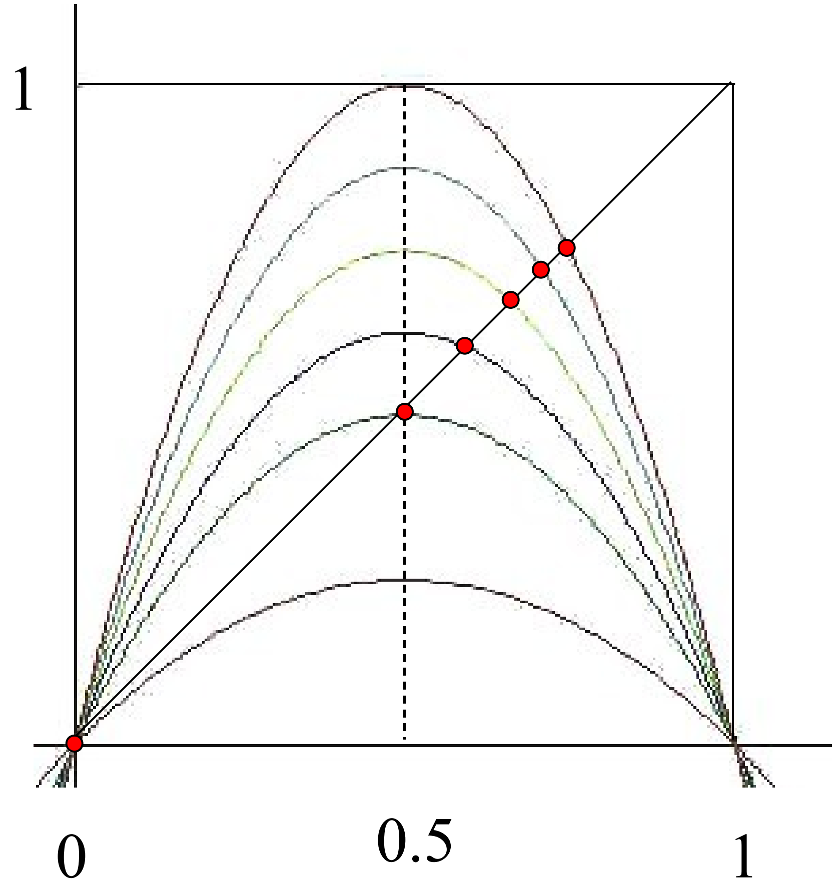
- **r** le facteur de fécondité (constant)
- **Amax** la limite supérieure de la population (constante aussi)
- On pose alors $a_n = A_n/Amax$
- on obtient l'équation logistique :

$$a_{n+1} = r.a_n.(1 - a_n)$$

Logistique $f(x) = r.x(1-x)$

- Famille paramétrée de fonctions $f_r(x) = r.x(1-x)$
- Pour $0 < r \leq 4$, $f_r(x)$ est un endomorphisme sur l'intervalle $[0,1]$
- Le graphe de $f_r(x)$ est une *parabole* orientée vers le bas, passant par $(0,0)$ et $(1,0)$

Équation Logistique



- Intersection de f_r avec la droite d'équation y=x (points fixes)

  Origine : 0

  $P_r = 1-(1/r)$

- Maximum au point **$(1/2, r/4)$**

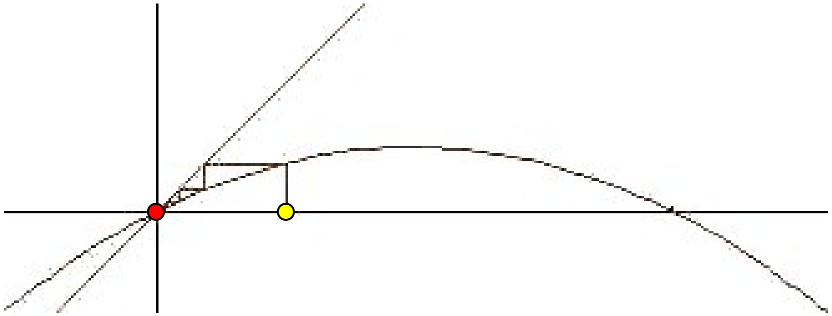
EQUATION LOGISTIQU

Cette Applet simule les itérations de l'équation Logistique $f(x) = r.x(1-x)$

Le comportement observé dépend de la valeur du paramètre r et de la valeur initiale x_0

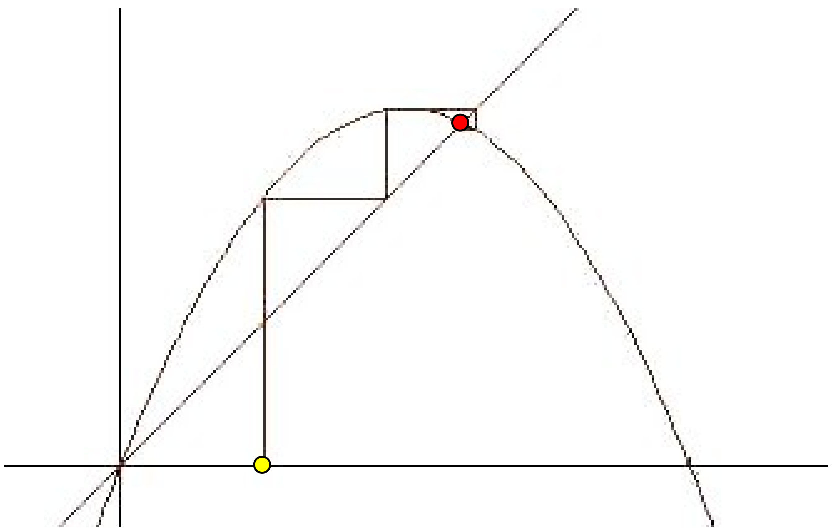
- Curseurs
  - horizontal contrôle la valeur initiale x_0
  - vertical contrôle le paramètre r

Équation Logistique : $0 < r < 1$



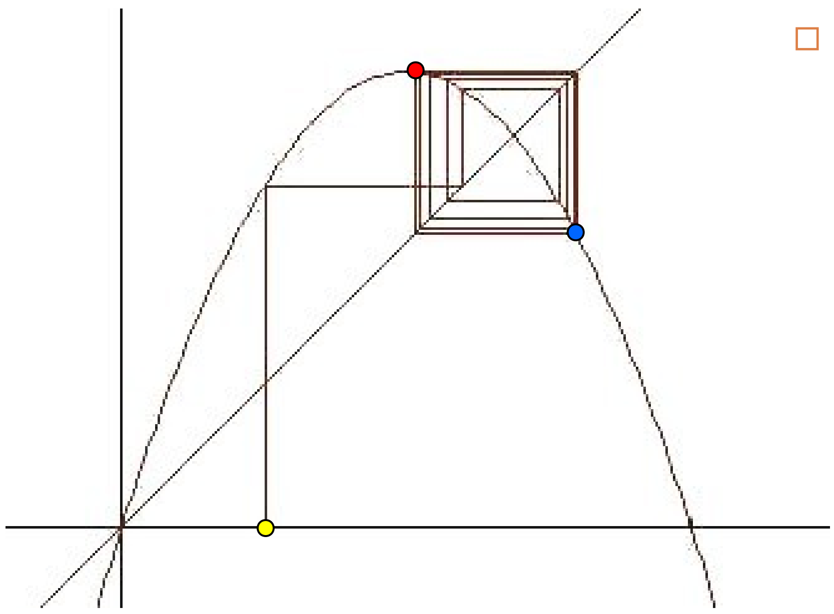
- 0 est un point fixe *attracteur*
- Valeur limite indépendante de la valeur initiale

Équation Logistique : 1 < r < 3



- 0 est un point fixe *répulseur*
- P_r est un point fixe *attracteur*
- Valeur limite indépendante de la valeur initiale

Équation Logistique : r = 3



- Bifurcation
- Période d'ordre 2
- Valeurs limites indépendantes de la valeur initiale
  - Si $3 \leq r < 3.45$ oscillation entre
    1. une valeur basse, avec nourriture abondante et forte croissance
    2. une valeur haute qui entraîne famine et mortalité élevée

Diagramme de Bifurcations

Représentation de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite récurrente $f^0=r.x(1-x)$, $f^{n+1}(x)=f^n(x)$

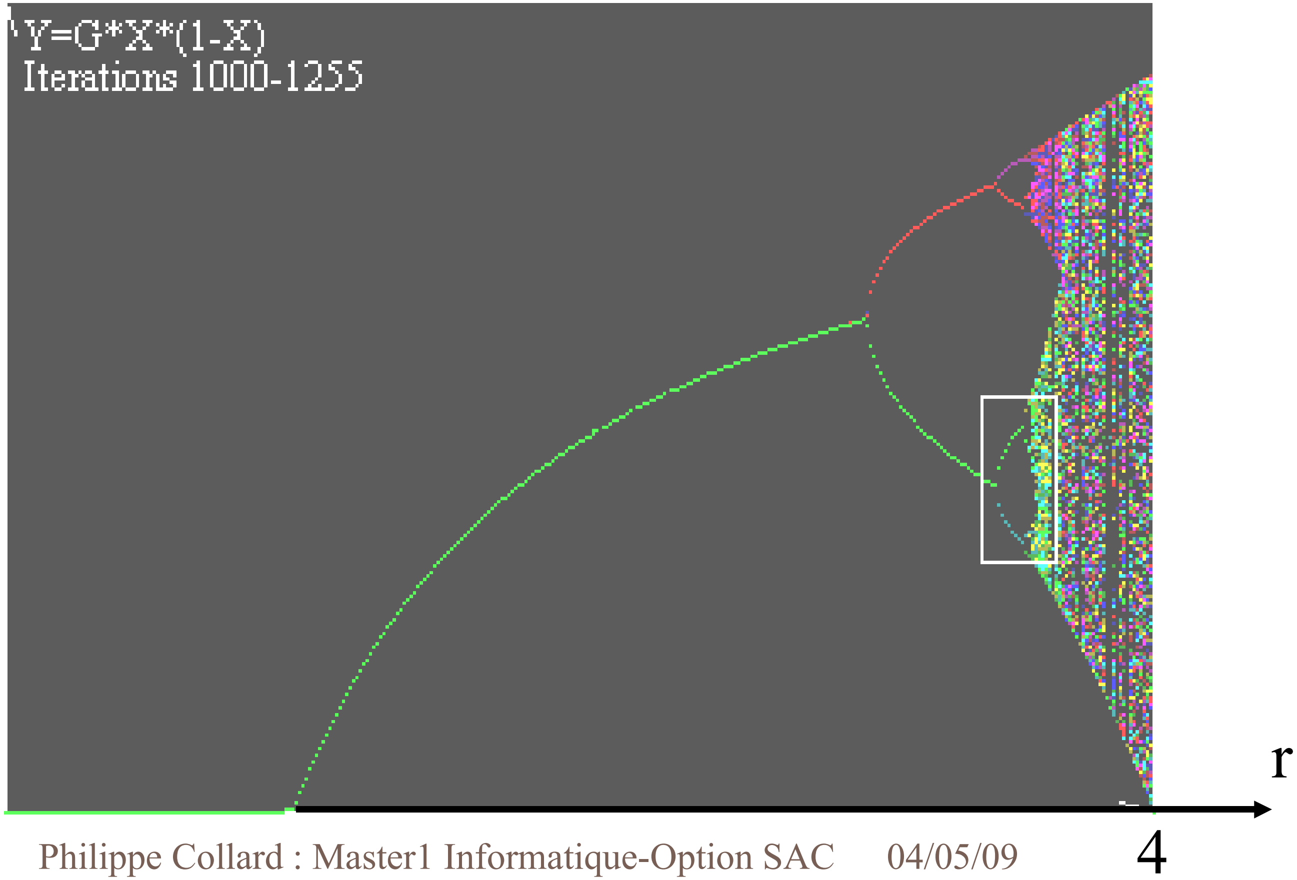
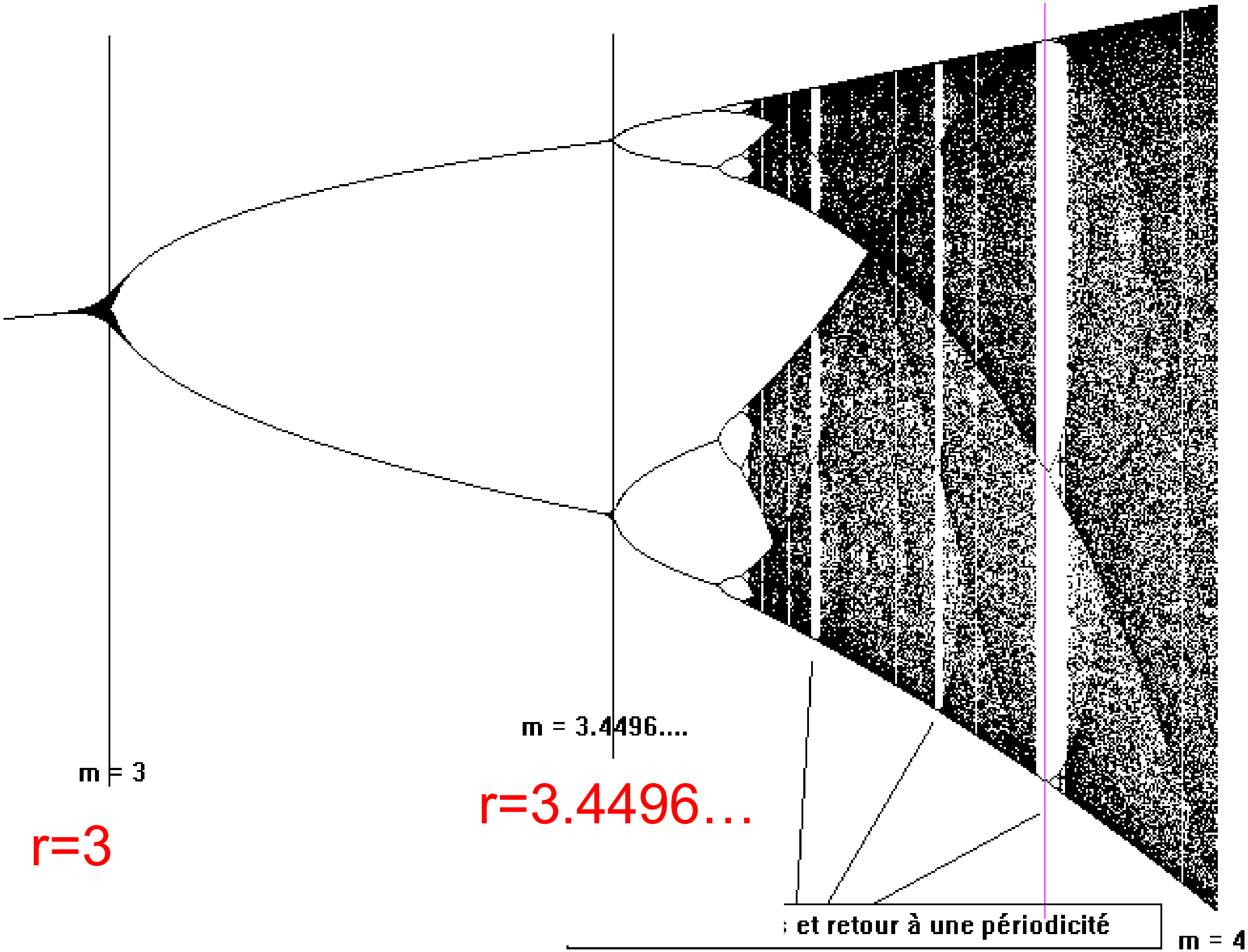


Diagramme de Bifurcations



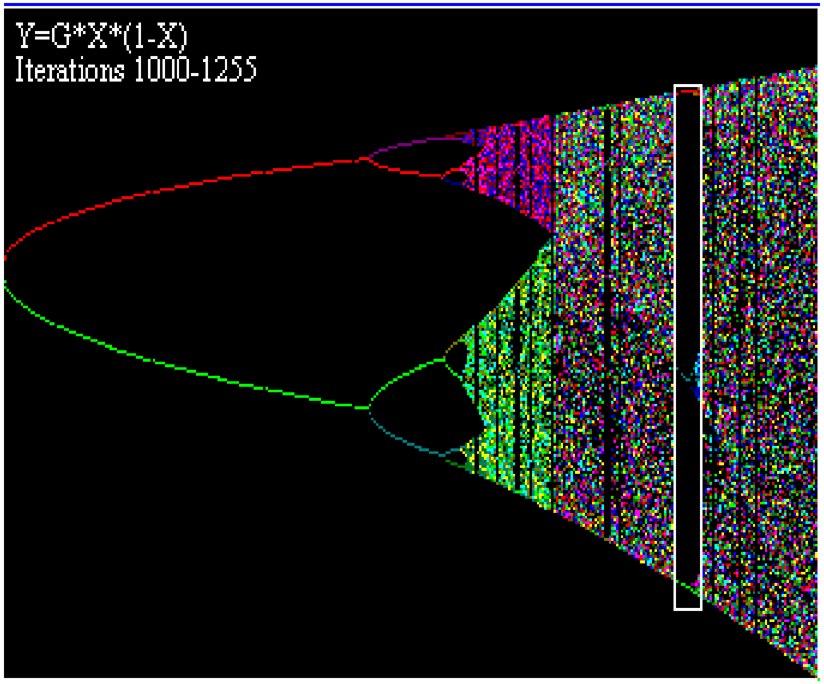
r=3

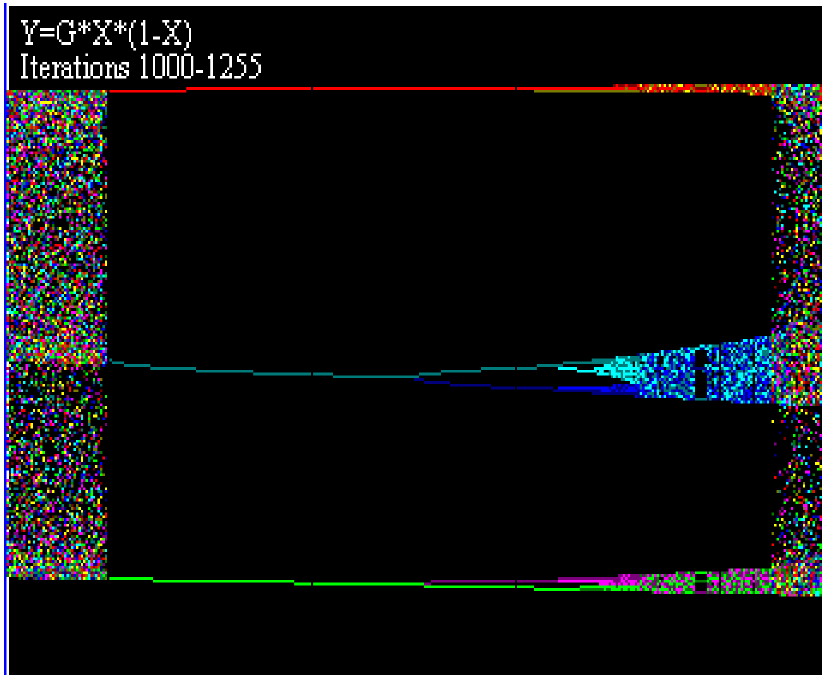
r=3.4496…

r=4

Théorème de Sarkovsky

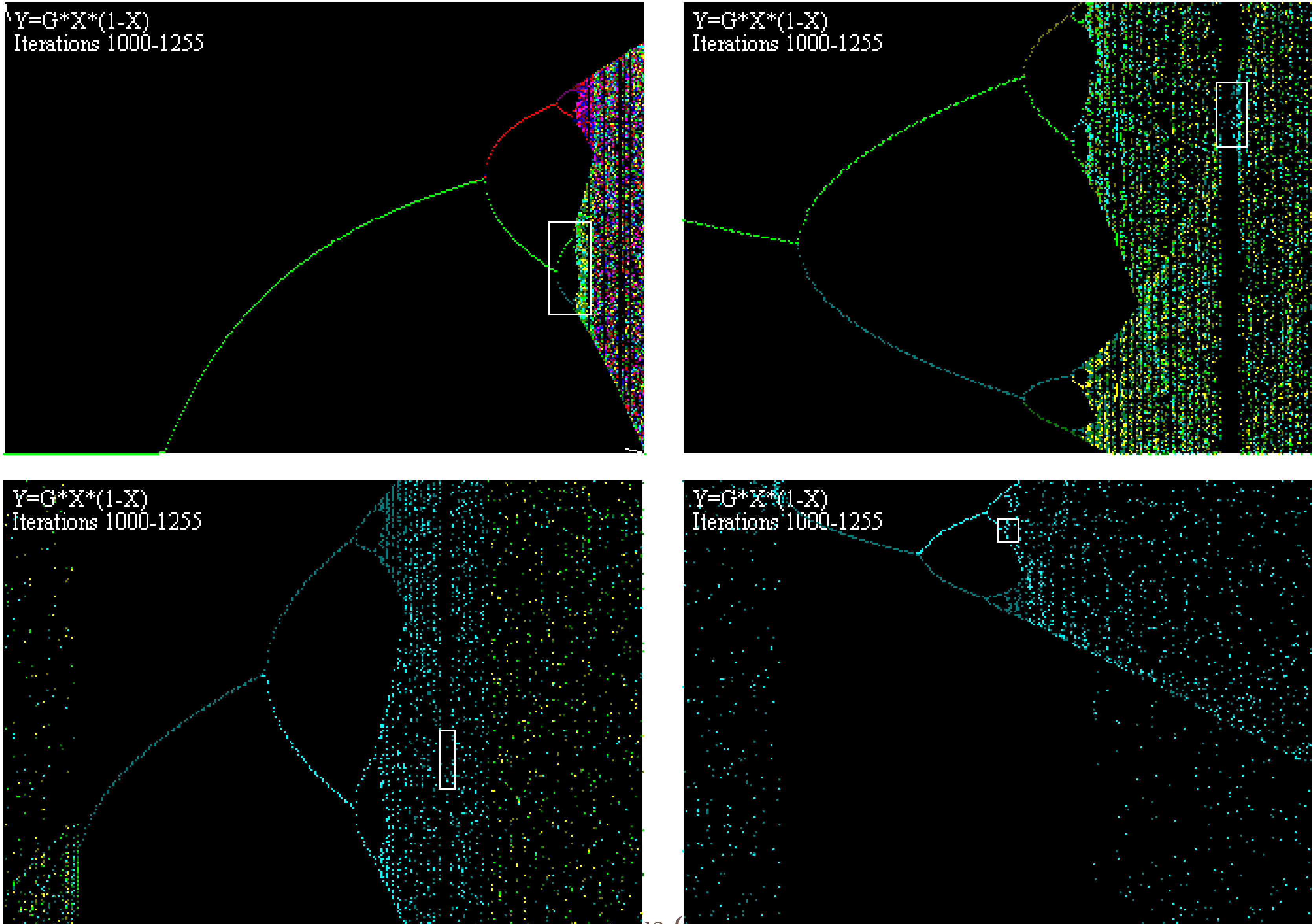
Si une fonction *continue* a un point périodique d'ordre trois, alors elle possède des points périodiques de tout ordre





r ~ 3.84

Diagramme de Bifurcations

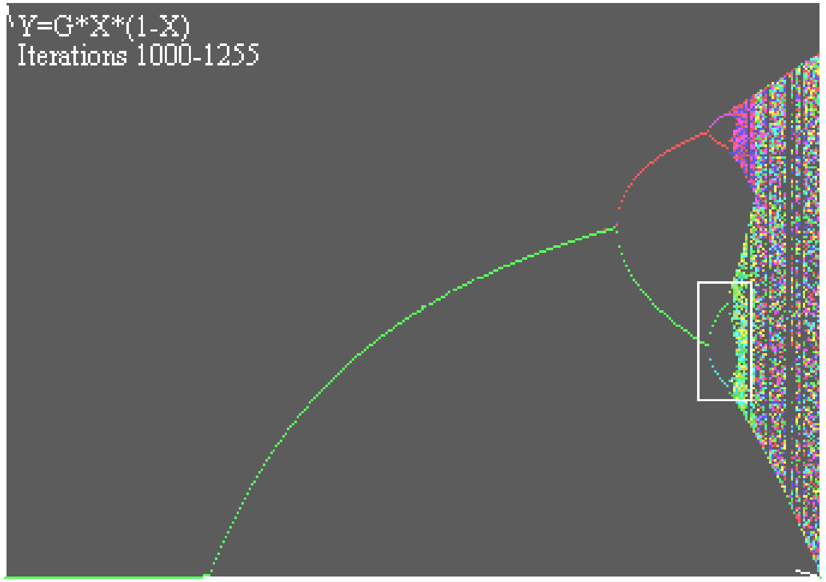


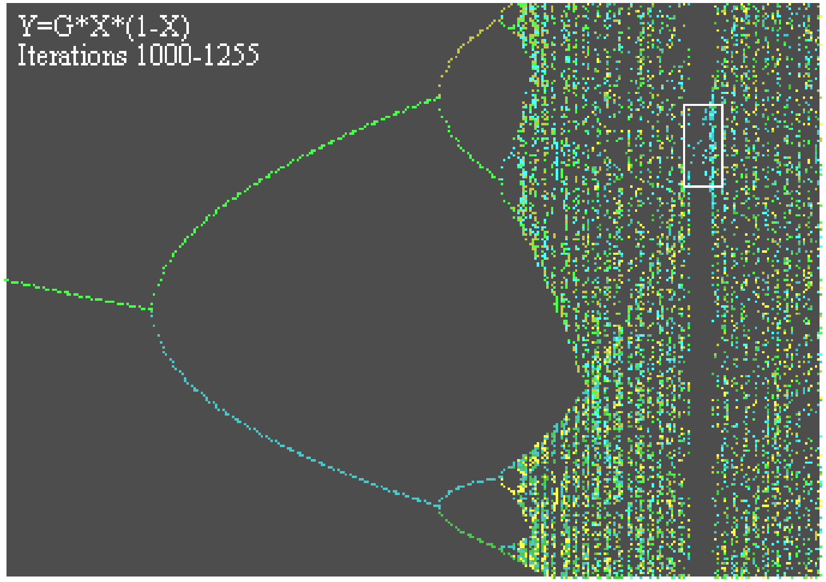
Trois types de comportement

Dépend du paramètre **r**

1. **Fixe**: la population approche une valeur stable
2. **Périodique**: la population alterne entre deux ou plusieurs valeurs fixes
3. **Chaotique**: la population visitera chaque voisinage dans un intervalle de [0, 1]. De plus, les orbites chaotiques montrent une sensitivité aux conditions initiales

At the Edge of Order :
Transitions vers le chaos par cascade de bifurcations





Le mot "chaos" a été introduit par T. Liand et J. Yorke en 1975 dans un article intitulé "Period Three Implies Chaos"

Doublement de Période

valeur limite unique

$r_1 = 3$ 1ère bifurcation

oscillations entre deux valeurs limites

$r_2 \sim 3.45$ 2ème bifurcation

période 4

$r_3 \sim 3.54$ 3ème bifurcation

période 8

$r^* \sim 3.5699$

période 2^∞ (point de Feigenbaum)

dynamique chaotique

Doublement de Période

Les valeurs de **r** pour les deux premières bifurcations peuvent être calculées analytiquement :

$$r_1 = 3 \text{ et } r_2 = 1 + \mathrm{sqrt}(6)$$

Soit $D_k = r_k - r_{k-1}$ la distance entre deux points de bifurcation

Pour déterminer la décroissance de cette distance

On étudie le rapport D_k / D_{k+1}

Bifurcations

Constante de Feigenbaum

Bifurcation #1 at		
Bifurcation #2 at	Difference=	Ratio=
Bifurcation #3 at	Difference=	Ratio=
Bifurcation #4 at	Difference=	Ratio=
Bifurcation #5 at	Difference=	Ratio=
Bifurcation #6 at	Difference=	Ratio=
Bifurcation #7 at	Difference=	Ratio=
Bifurcation #8 at	Difference=	

Bifurcations

Bifurcation #1 at 3.0000000		
	Difference=.4493830	
Bifurcation #2 at 3.4493830		Ratio=4.7
	Difference=.0946710	
Bifurcation #3 at 3.5440540		Ratio=4.7
	Difference=.0203420	
Bifurcation #4 at 3.5643960		Ratio=4.7
	Difference=.0043600	
Bifurcation #5 at 3.5687560		Ratio=4.7
	Difference=.0009350	
Bifurcation #6 at 3.5696910		Ratio=4.7
	Difference=.0002000	
Bifurcation #7 at 3.5698910		Ratio=4.7
	Difference=.0000430	
Bifurcation #8 at 3.5699340		

Constante de Feigenbaum : 4,669…

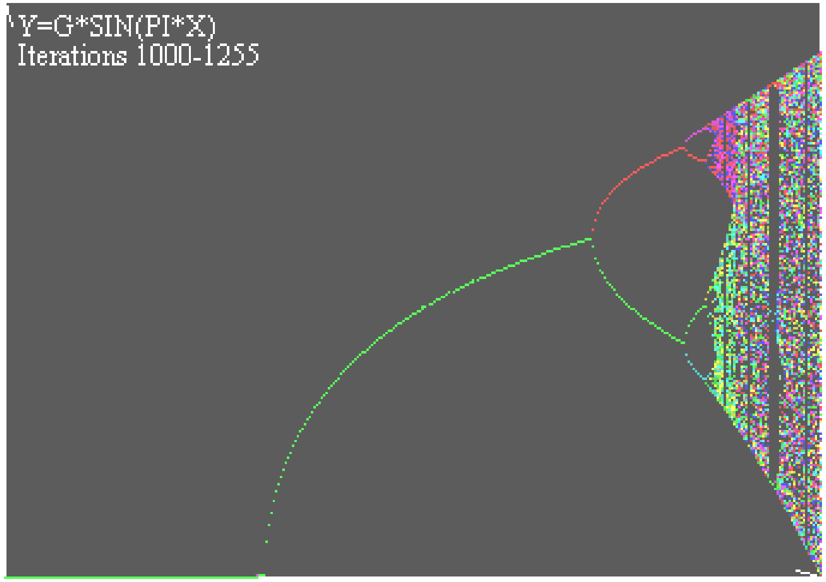
- La constante associée à la séquence des dédoublements de période est la constante de **Feigenbaum** ($\Delta \sim 4,669$)

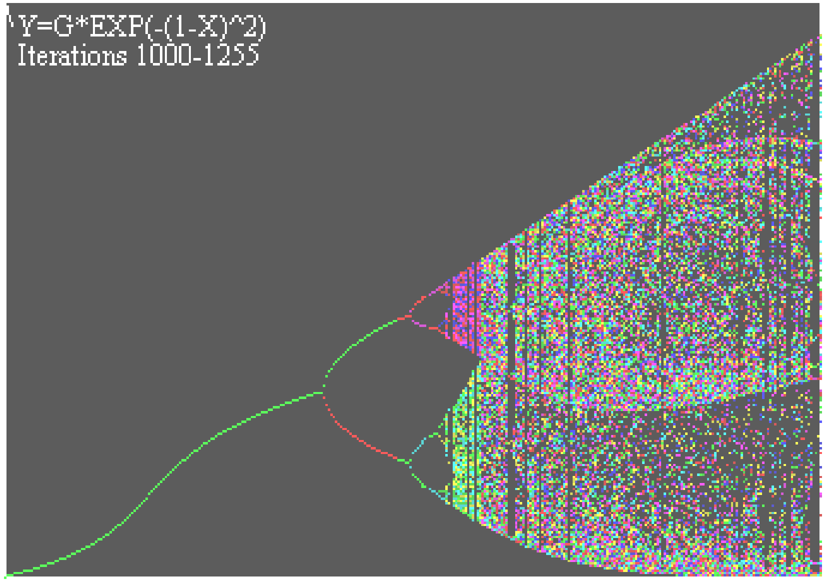
- Pour des valeurs de r suffisamment proches de r^*, la distance $D_k = r_k - r_{k-1}$ entre deux points de bifurcation décroît par un facteur de Δ pour chaque bifurcation.

$$D_k \sim \Delta . D_{k+1}$$

Constante De Feigenbaum : Universalité

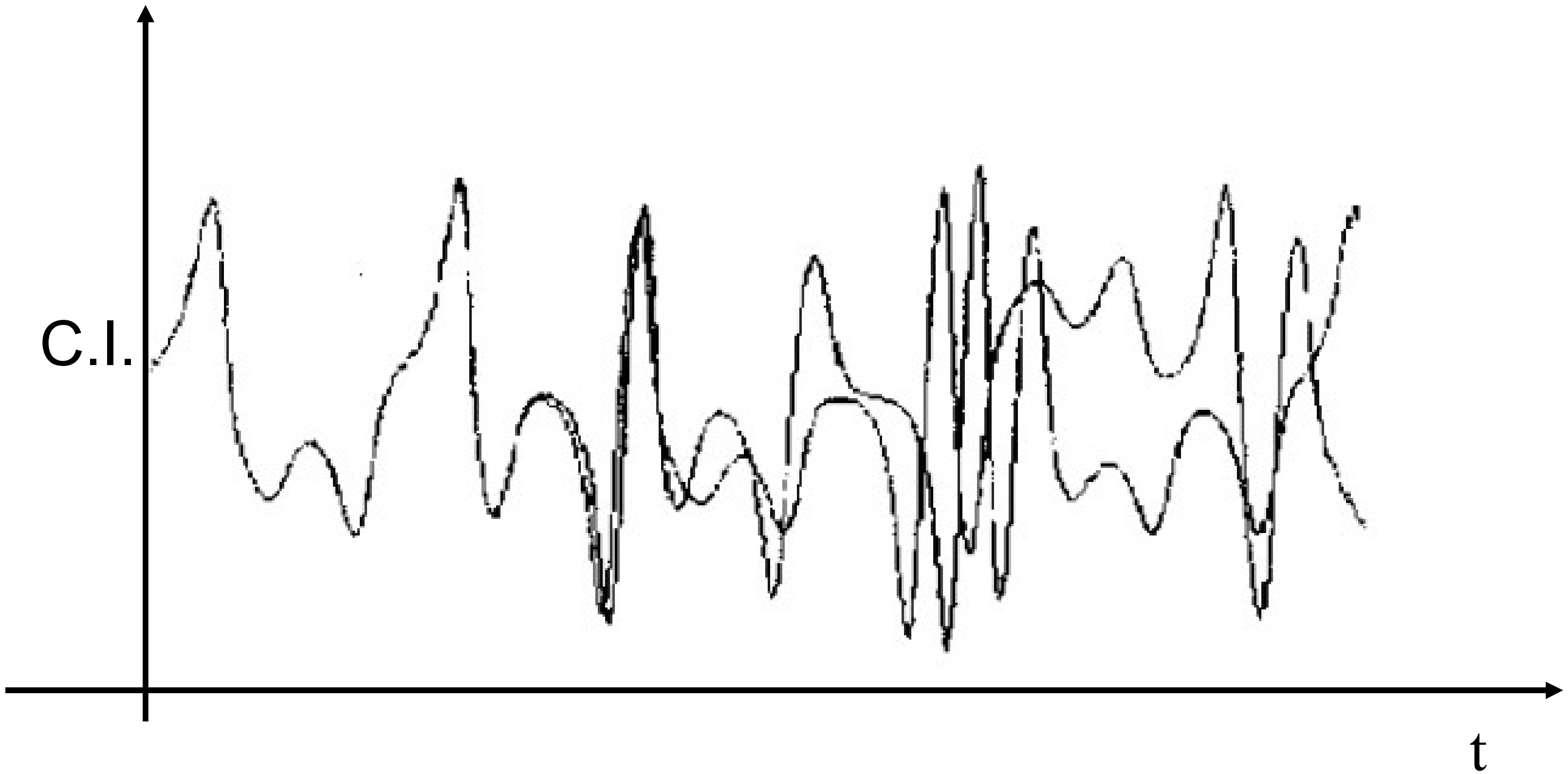
- La constante de Feigenbaum caractérise la transition vers le chaos par dédoublement de période
- Découverte par *Feigenbaum* (1975)
- Démontrée par *Lanford* et *Coullet* (1980)





Effet papillon (Butterfly effect)

chaos = S.C.I



Exposant de Lyapounov

- Lyapounov est un mathématicien russe qui vécut à la fin du 19ème siècle, soit bien avant l'invention des calculateurs
- L'exposant de Lyapounov caractérise la rapidité à revenir au cycle limite. On parle de "stabilité" d'autant plus grande que le retour est rapide et d'autant plus petite qu'on est proche du chaos
- L'exposant de Lyapounov est « en gros » l'opposé de la stabilité

Exposant de Lyapounov

- Le principe est de caractériser la manière dont deux courbes se comportent l'une par rapport à l'autre, en étudiant leur distance relative
- La différence exponentielle des trajectoires peut être caractérisée de manière quantitative en mesurant leur taux de divergence
- Varie comme l'opposé de la stabilité
  - Négatif pour les évolutions stables
  - Positif quand le chaos est présent

Exposant de Lyapounov

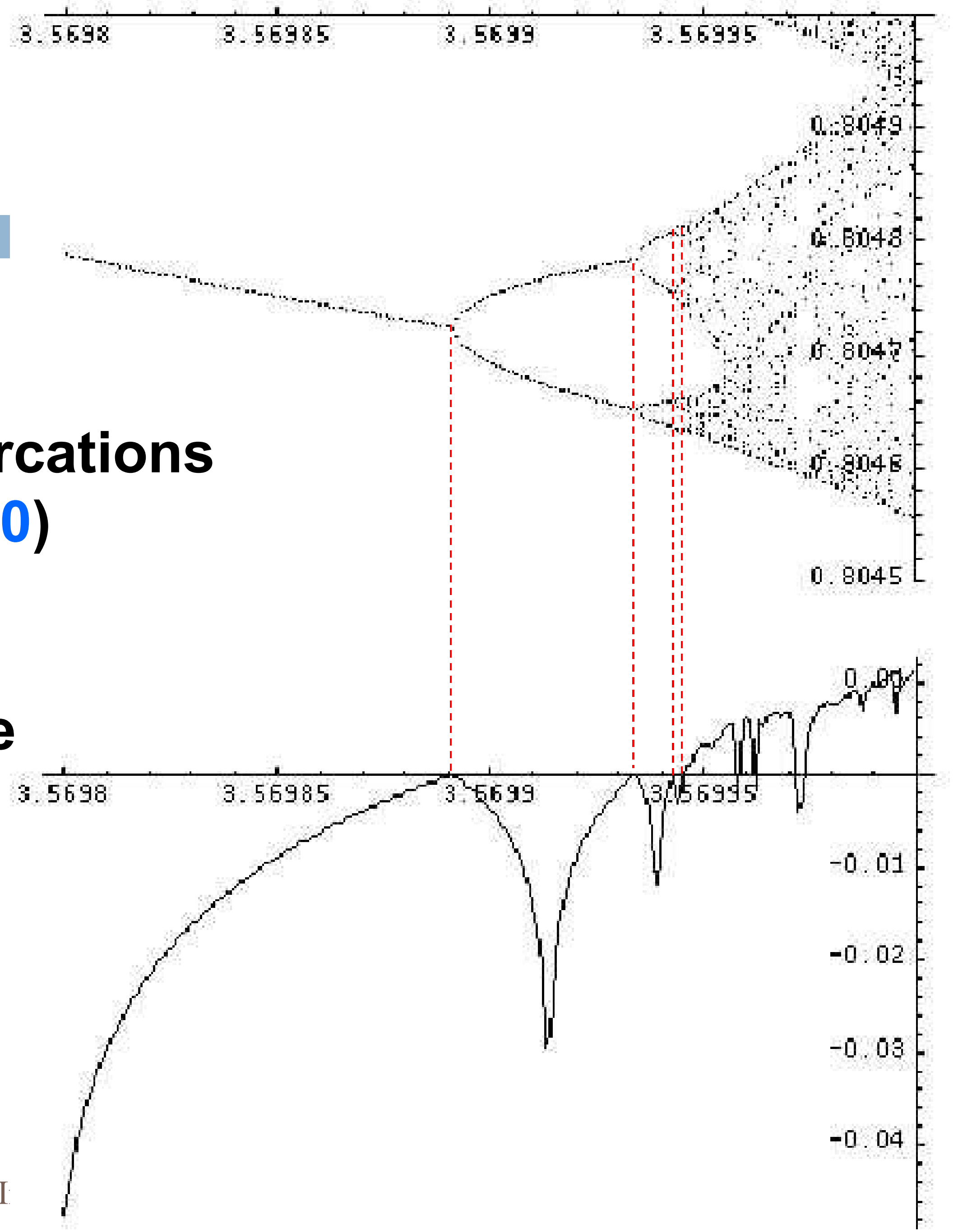
- Pour un système à une *seule variable*, le taux de divergence est donné par *l'exposant de Lyapunov* :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log(|f'(x_i)|)$$

  - Calcul de λ pour l'équation logistique

```
// Initialisation : x0 arbitraire entre 0 et 1
x=x0 ; for(i=1;i<N;i++) x=r*x*(1-x);
// Calcul de l'exposant
total=0;
for(i=1;i<M;i++){
     x=r*x*(1-x);
     total=total+Log(r*(1-2*x))/Log(2);}
exposant=total/M;
/* N et M entiers arbitraires, aussi grands que possible pour
que le calcul soit précis */
```

Bifurcations et Exposant de Lyapounov



- **Distance entre deux bifurcations de plus en plus courte (λ=0)**

- **Seuils de bifurcations s'accumulent au voisinage de r* (~ 3,57)**

- **Au delà de r*, chaos (λ ≥ 0)**

Dynamique des populations interactions entre deux espèces

- Le modèle étudié précédemment (Equation Logistique) prend en compte une seule espèce
- Les dynamiques intéressantes en biologie concernent les interactions entre plusieurs espèces
- Le modèle mathématique de Lotka et Volterra (1926) décrit de façon très simplifiée les interactions entre deux espèces dans un écosystème, un *prédateur* et une *proie*
- Le modèle comporte deux équations, qui décrivent comment les deux populations (proies et prédateurs) évoluent

Modèle de *Lotka-Volterra*

Evolution de deux populations décrite par les deux équations :

Evolution des proies : $X(t+1) - X(t) = +r.X(t) - a.X(t).Y(t)$
Evolution des prédateurs : $Y(t+1) - Y(t) = -m.Y(t) + b.X(t).Y(t)$

$X(t)$ la population des proies à la génération t
$Y(t)$ la population des prédateurs à la génération t

r = taux naturel de reproduction des proies en l'absence de prédateur
a = taux de mortalité des proies du aux prédateurs
b = taux de reproduction des prédateurs relativement aux proies mangées
m = taux naturel de mortalité des prédateurs en l'absence de nourriture (proies)

+r.X taux naturel de reproduction des proies en l'absence de prédateur dépend simplement du nombre de proies dans la population, et qu'il y a des ressources illimitées (nourriture) disponibles pour les proies.

-a.X.Y diminution des proies dans la population due aux prédateurs.

+b.X.Y augmentation des prédateurs due aux proies.

-m.Y diminution des prédateurs par mort "naturelle".

Modèle de Lotka-Volterra

Evolution des proies :

$$X(t+1) - X(t) = +r.X(t) - a.X(t).Y(t)$$

Evolution des prédateurs :

$$Y(t+1) - Y(t) = -m.Y(t) + b.X(t).Y(t)$$

r = taux naturel de reproduction des proies en l'absence de prédateur
a = taux de mortalité des proies du aux prédateurs
b = taux de reproduction des prédateurs relativement aux proies mangées
m = taux naturel de mortalité des prédateurs en l'absence de nourriture (proies)

Expérience 1 : une seule espèce

- sans prédateur : $Y(0)=0$
- sans proie : $X(0)=0$

Modèle de *Lotka-Volterra*

Expérience 2 : Etat fixe

- On considère le système **r=0.5 , a=0.005 , b=0.005, m=1**

- Les populations initiales (**X=200,Y=100**) correspondent à un état fixe

- Perturber légèrement les populations initiales (X=200,Y=100). Comment évoluent les populations? Cet état fixe (X=200,Y=100) est-il stable ?

Modèle de *Lotka-Volterra*

- Un comportement intéressant est observé quand le taux de mortalité des prédateurs est beaucoup plus important que celui des naissances
- La population des proies augmente de façon durable quand il y a peu de prédateurs. Quand le nombre de proies atteint un pic, la population de prédateurs augmente de façon exponentielle, épuisant ainsi le nombre de proies et réduisant la population de prédateurs – puis le cycle ce répète
- Ce type de phénomène a, par exemple, été observé dans le comportement des populations de *lynx* et de *lièvre* canadiens mesurées par leur nombre de ventes par la *Compagnie Commerciale de la Baie d'Hudson* entre 1845 et 1935

Expérience 3 : Dynamique cyclique

On considère le système r=0.1 , a=0,1 , b=0,1 , m=0,1

- A partir des populations initiales (X=2,Y=1) la dynamique est *cyclique*.
- Quelle est la période du cycle ?