

Automates Cellulaires

Licence 3 - Introduction aux Systèmes Complexes

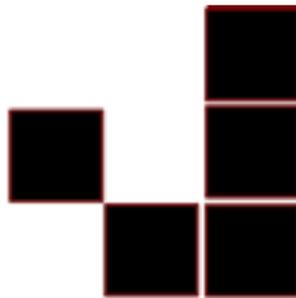
SÉBASTIEN VEREL

verel@i3s.unice.fr

www.i3s.unice.fr/~verel/TEACHING/12-13/introSC/index.html

Équipe ScoBi - Université Nice Sophia Antipolis

6 février 2013



Quelques brefs repères historiques

- 1940, Stanislaw Ulam (Los Alamos) : modélisation de la croissance des cristaux
- 1940, John Von Neumann (Los Alamos) : système auto-réplicatif, robot qui se copie tout seul
Naissance du premier automate cellulaire
- 1970, John Conway : Jeu de la vie

Composants d'un automate cellulaire

- Une grille d'éléments appelés **cellules**



- Un ensemble d'**états**, aussi appelé alphabet,

$$A = \{0, 1\}$$

- Un **voisinage**

$$I = \{-1, 0, 1\}$$

- Une table appelée **règle locale**

$$f : \{0, 1\}^3 \longrightarrow \{0, 1\}$$

$\{0, 1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
f	1	0	1	1	0	1	1	0

Définition

Une **configuration** est l'affectation à chaque cellule d'un état

$$x = \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline & & & & & & & & & \end{array}$$

$$x = \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

- Une configuration est une fonction :

$$x : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0, 1\}$$

- De façon équivalente, un vecteur :

$$x \in \{0, 1\}^n$$

Mise à jour d'une configuration

- L'état de chaque cellule est mise à jour de manière **synchrone**, *i.e.* dans le même instant
- La mise à jour est faite de manière **locale** par la règle locale...
- ... appliquée en fonction de l'état courant de la cellule et des états des cellules voisines

$$\begin{array}{r} x \\ = \\ \dots \quad x_{i-1} \quad x_i \quad x_{i+1} \quad \dots \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ f \\ x' \\ = \\ \dots \quad \quad \quad x'_i \quad \quad \quad \dots \end{array}$$

Condition aux limites

$$x = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \\ \hline ? \quad || \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad || \quad ? \\ \hline \end{array}$$

$$x' = \begin{array}{c} \hline ? \quad || \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad || \quad ? \\ \hline \end{array}$$

Modélisation / Simulation des extrémités

- Mettre les extrémités dans un état arbitraire (fixe ou non)

$$x = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \\ \hline \mathbf{1} \quad || \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad || \quad \mathbf{0} \\ \hline \end{array}$$

- Faire "boucler" le réseau d'automates : l'extrémité gauche correspond à la cellule n et l'extrémité droite correspond à la cellule 1

$$x = \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \\ \hline x_n \quad || \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad || \quad x_1 \\ \hline \end{array}$$

- Définir des règles élémentaires particulières pour les extrémités

Un automate cellulaire defini un systeme qui :

- Depend du temps :
un etat du systeme est une configuration $x(t)$
- Dont l'etat futur depend des etats present et passes
- Evolution de maniere deterministe :
pas d'ambiguite, pas d'aleatoire

Un automate cellulaire est un **systeme dynamique**

Definition

$\langle X, F \rangle$ est le systeme dynamique associe a un AC ou :

- $X = \{0, 1\}^n$, ensemble des configurations du systeme
- $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$, fonction de transition globale :

$$\forall x \in \{0, 1\}^n \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad F(x)_i = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$$

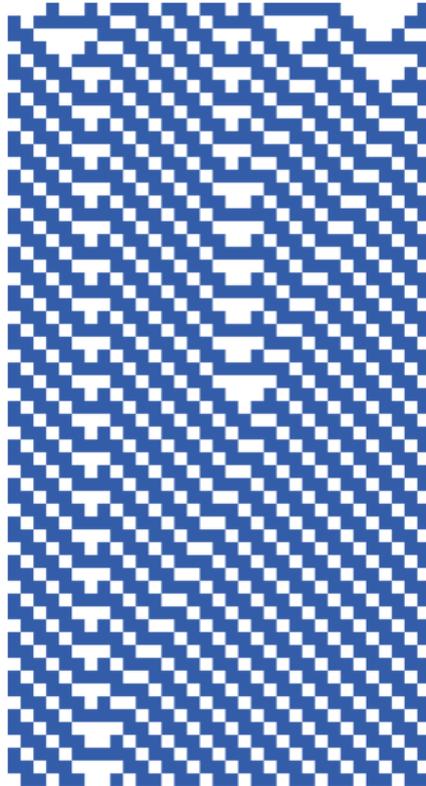
Diagramme Espace-Temps

On peut représenter l'évolution verticalement...

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
$x(0)$	=	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0
$x(1) = F(x(0))$	=	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
$x(2) = F(x(1))$	=	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
$x(3) = F(x(2))$	=	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
												
$x(t) = F^t(x(0))$	=	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Diagramme Espace-Temps

... et graphiquement, en associant une couleur à chaque état



Définition

Un automate cellulaire (AC) est quadruplet (\mathcal{L}, A, I, f) où :

- $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^D$ est une grille régulière de cellules
- A est un ensemble fini d'états
- $I = \{u_1, u_2, \dots, u_s\} \subset \mathbb{Z}^D$ un voisinage
- $f : A^{|I|} \rightarrow A$ une règle locale

Configuration

Une configuration est une fonction $x : \mathcal{L} \rightarrow A$ qui associe à chaque cellule $v \in \mathcal{L}$ l'état $x_v \in A$

Définition

$\langle X, F \rangle$ est le système dynamique associé à l'AC (\mathcal{L}, A, I, f) où :

- $X = A^{\mathcal{L}}$, ensemble des configurations du système
- $F : A^{\mathcal{L}} \longrightarrow A^{\mathcal{L}}$, fonction de transition globale :

$$\forall x \in A^{\mathcal{L}} \quad \forall v \in \mathcal{L} \quad F(x)_v = f(x_{v+u_1}, \dots, x_{v+u_s})$$

A partir d'une configuration initiale $x(0)$ on obtient la dynamique :

$$x(0) \xrightarrow{F} x(1) \xrightarrow{F} x(2) \xrightarrow{F} x(3) \xrightarrow{F} \dots$$

Nombre de règles élémentaires

Combien de règles élémentaires pour l'AC classique avec $A = \{0, 1\}$ et $I = \{-1, 0, 1\}$?
Combien de tables de règle locale ?

$\{0, 1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
f	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7

$$2^{2^3} = 256 \text{ règles}$$

On peut numéroter les règles par un nombre entier entre 0 et 255 :

$$n_f = f_0 \cdot 2^0 + f_1 \cdot 2^1 + f_2 \cdot 2^2 + f_3 \cdot 2^3 + f_4 \cdot 2^4 + f_5 \cdot 2^5 + f_6 \cdot 2^6 + f_7 \cdot 2^7$$

C'est bien rigolo tout ça, mais à quoi ça sert ?

- A **modéliser** (et étudier) des systèmes physiques, chimiques, biologique, sociaux, etc. :
 - Traffic routier,
 - Changement d'opinion,
 - Problème de synchronisation,
 - Gaz,
 - Phénomène de croissance, cristallisation (flocon, développement embryon, etc.)
- A étudier ce qu'on peut calculer : **modèle de calcul**
Simulation de machines à calculer (machine de Turing, etc.)

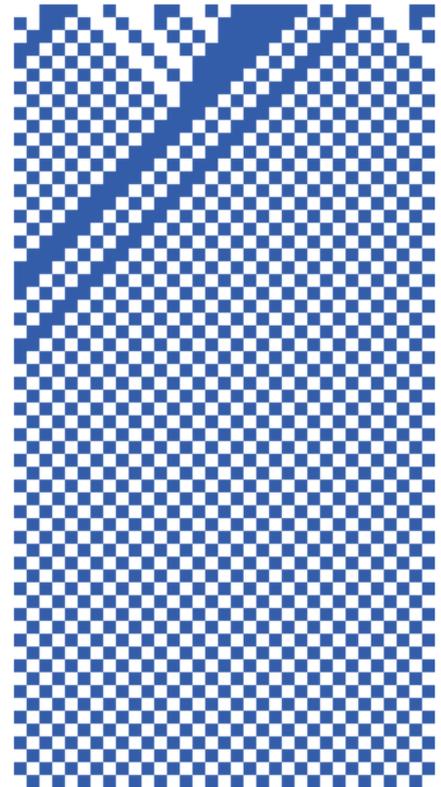
Modélisation du trafic automobile

- Le réseau représente la route
- 0 espace, 1 voiture
- 1 seule voiture par unité d'espace
- Les voitures roulent de gauche à droite
- Elles ne peuvent avancer que si l'espace à droite est vide (pour éviter les accidents)

$\{0, 1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
f								

$\{0, 1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
f	0	0	0	1	1	1	0	1

- Etat stable ?
- Etat transitoire ?
- Zone régulière (langage régulier) :
Signaux
- Frontières : rencontre de signaux
- On voit les bouchons remonter
comme un écoulement fluide



Modélisation du changement d'opinion

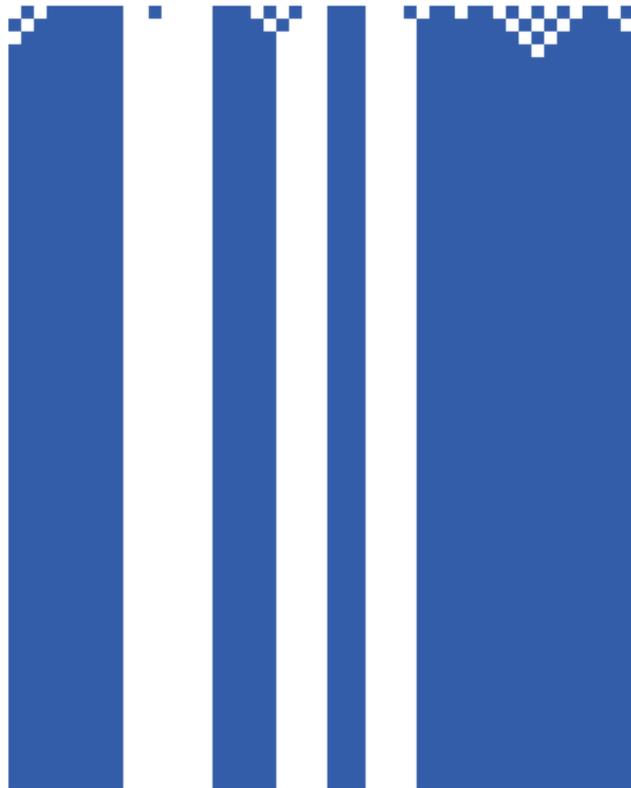
- Une cellule représente une personne
- 0 de l'opinion A , 1 de l'opinion B
- Prend l'opinion de la majorité (dans son voisinage)

$\{0, 1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
f								

$\{0, 1\}^3$	000	001	010	011	100	101	110	111
f	0	0	0	1	0	1	1	1

- Etat stable ?
- Etat transitoire ?
- Signaux ?
- Frontières ?

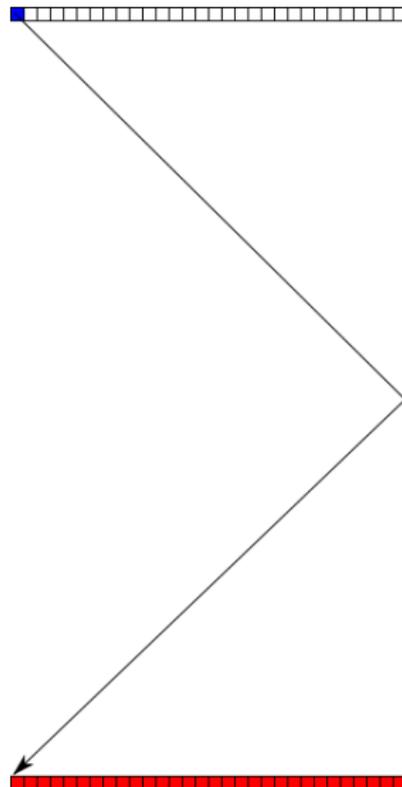
- Les opinions dans une zone minoritaire disparaissent
- Les frontières sont stables



Synchronisation du ligne de fusilliers

Problème

- Problème posé par Minsky en 1967
- Prototype "minimal" du problème de synchronisation
- Partant d'une configuration donnée : un général à gauche donnant l'ordre, les soldats étant au repos
- Les soldats doivent être dans le même état "feu" quand l'information a circulé dans le réseau



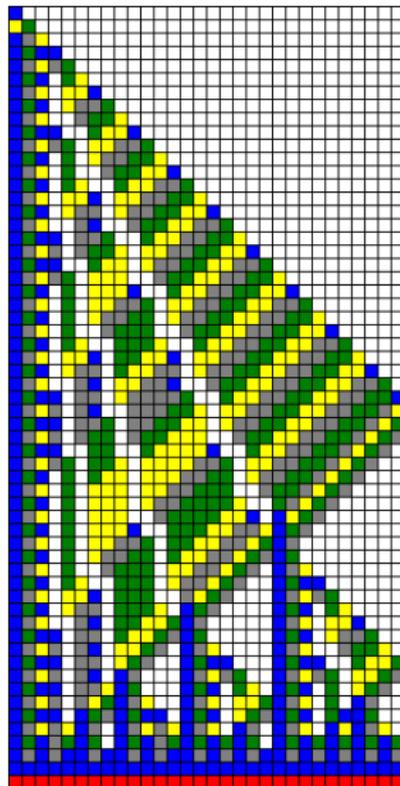
Synchronisation du ligne de fusilliers

Une solution

- Mazoyer 1987
- Solution en temps minimal avec 6 états
- Le problème reste ouvert avec 5 états

Problème fondamental

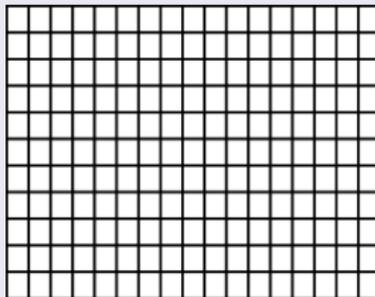
- A partir d'une règle locale,
- **Emergence** d'un comportement global (synchronisation)



Automate cellulaire en 2D

Même définition bien sûr.

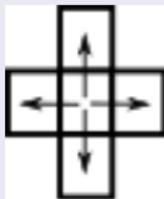
- Grille est de dimension 2 :



- Voisinage :

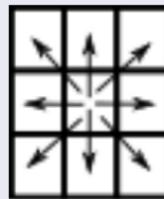
Von Neumann

5 cellules

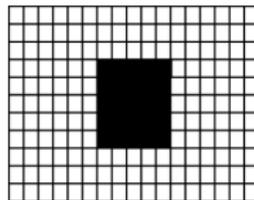
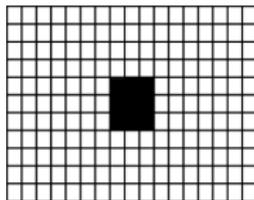
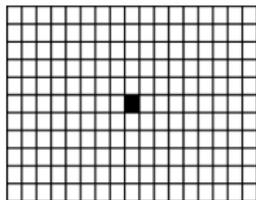


Moore

9 cellules



D'abord exemple très simple



...

Sauriez-vous trouver les règles élémentaires ?

Automate cellulaire auto-réplicateur

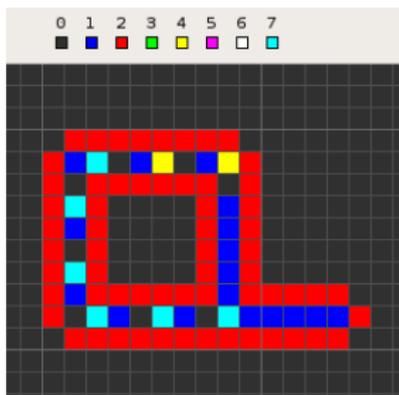
Machine auto-répliatrice !...

A la recherche de principes permettant l'auto-réplication

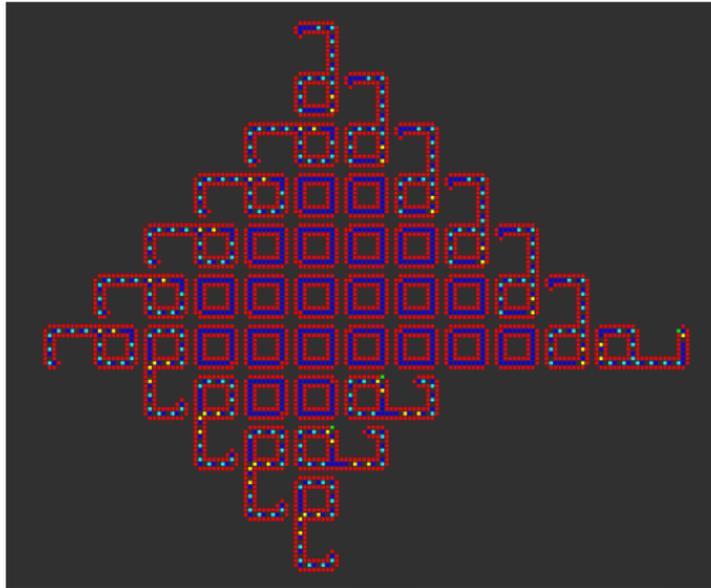
- Automate de Von Neumann (1947) :
 - 29 états, construit à partir d'une propriété d'universalité
 - Organisation logique suffisante pour assurer l'auto-réplication
 - ⇒ Preuve conceptuelle et effective de la simplicité des mécanismes d'auto-réplication
- Automate de Langton :
 - Considérer que les éléments nécessaires, pas d'universalité

Automate de Langton

- 8 états, 29 règles élémentaires,
- Fabrication d'une 'membrane' et transport du matériel 'génétique' reproducteur



Automate de Langton



- Une modélisation d'un processus de vie et de mort d'individus
 - 1 : cellule active ("vivante"), 0 : cellule inactive ("morte"),
 - Grille 2D et voisinage de Moore
 - Règles :
 - Une cellule inactive entourée de 3 cellules actives devient active ("naissance")
 - Une cellule active entourée de 2 ou 3 cellules actives reste active
 - Dans tous les autres cas, la cellule reste ou devient inactive ("meurt")
-
- Beaucoup "d'objets" vivent dans ce monde fantastique
 - Simulation d'une machine de Turing possible

Stable et périodique

Motifs stables :



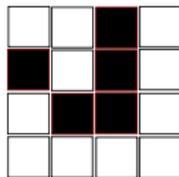
Motifs périodiques (période 2) :



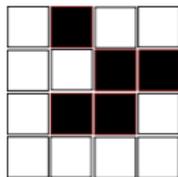
Les gliders (planeurs)

THE glider de période 4

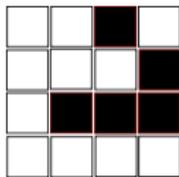
$t = 0$



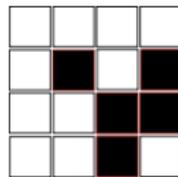
$t = 1$



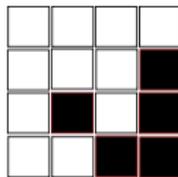
$t = 2$



$t = 3$



$t = 4$



- Période temporelle 4
- Déplacement spatial : translation de $(+1, +1)$

Prenons un peu de recul

Type de modélisation

	Temps	Espace	Variables
Equa. Diff.	continu	(continu)	continu
Suite	discret		discret/continu
AC	discret	discret	discret

Modélisation stochastique / déterministe

Passage d'un modèle discret à un modèle continu

Cf. notes d'Annick Lesne, Ecole 'biologie intégrative : l'organisation du vivant', 2002.

- Lorsque trop grand nombre d'éléments rend inopérant leur description (trop grand nombre de degré de liberté)
- Lorsque l'échelle d'observation est très supérieure à l'échelle typique des phénomènes élémentaires

Méthodes, techniques

- Moyenne locale instantanées : ex. température Valable dans une certaine "limite continue", contient assez d'éléments
- Homogénéisation : ex. milieux poreux milieu inhomogène à petite échelle, apparait comme homogène à plus grande échelle
- Distribution de probabilité d'une observable individuelle : remplacer la trajectoire (x_t) par une mesure invariante, *i.e.* distri. de proba. de présence instantanée, en régime stationnaire

Passage d'un modèle continue à un modèle discret

- Elagage adéquat des degrés de liberté
 - Permet l'étude numérique (informatique !), approche analytique (énumération exacte)
-
- Modèle de percolation : ex. Milieux poreux, alliages, gels de polymère, épidémie
Discrétisation en cellules (site) et/ou liens
On ignore les propriétés physiques, chimique, biologique de l'occupation d'un site
Information qualitative sur l'état du site et/ou du lien

Emergence de propriétés universelles liée à la géométrie, et non aux phénomènes physiques
 - Modèle de section de Poincaré :
mesure de la variable en des points particuliers de la dynamique (section de Poincaré)
Discrétisation intrinsèque adapté à la dynamique

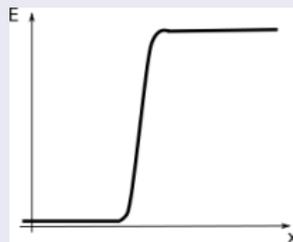
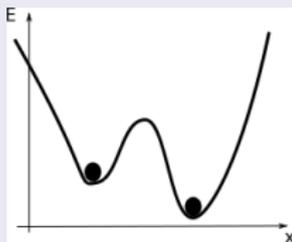
Emergence de comportement

Emergence d'un comportement continu

- Fluide : ensemble de particules, caractérisé par vitesse, etc.
- Sable : écoulement du sablier
- Le trafic automobile (cf avant)

Emergence d'un comportement discret

- Comportement discret émergent : dynamique avec plusieurs états stables
- Milieux excitables : milieux monospable, réponse fortement non-linéaire (sigmoïde)



Patch

- Agent statique de netLogo
- caractéristiques des patches :
`pxcor`, `pycor`, `pcolor`, `plabel`
- itération sur l'ensemble des patches :
`ask patches [...]`
`ask patches with [...] [...]`
- Patch de coordonnées (x, y) :
`patch x y`
- Patch (dx, dy) relativement à la position courante :
`patch-at dx dy`

of : pour obtenir la valeur d'une variable d'un agent particulier :

```
[ variable ] of turtle 0
```

```
[ pcolor ] of patch 0 10
```

Les automates Cellulaires

- Modèle fondamental de système dynamique discret
- Modèle de calcul
- Variété des dynamiques, émergence de propriétés
- De nombreuses extensions possibles : asynchrone, stochastique, variable continue, réseau d'automates non régulier, etc.

