Simplexe

Recherche Opérationnelle et Optimisation
Master 1 I2L

Sébastien Verel
verel@lisic.univ-littoral.fr
http://www-lisic.univ-littoral.fr/~verel

Université du Littoral Côte d'Opale
Laboratoire LISIC
Equipe CAMOME

Plan

1. Base et points extrêmes
2. Algorithme du simplexe

Bibliographie

Cours de recherche opérationnelle, Nadia Brauner, IMAG.

Forme d'un problème de prog. lin.

Forme normale

$$\begin{array}{rrcl} Max & z & = & c.x \\ & A\,x & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$c = (c_i) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_j)^t \in \mathbb{R}^m$,
$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Forme d'un problème de prog. lin.

Forme normale

$$\begin{array}{rrcl} Max & z & = & c.x \\ & A\,x & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$c = (c_i) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_j)^t \in \mathbb{R}^m$,
$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Forme standard

$$\begin{array}{rrcl} Max & z & = & c.x \\ & A\,x & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$c = (c_i) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_j)^t \in \mathbb{R}^m$,
$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Equivalence forme normale / forme standard

Exercice

Ecrire sous forme standard le système suivant :

$$\begin{array}{lrcl} Max & z & = & 4x+5y \\ & 2x+y & \leq & 8 \\ & x+2y & \leq & 7 \\ & y & \leq & 3 \\ & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

Propriétés polytope

Proposition

Un polytope n'a qu'un nombre fini de sommets.

Tout point M d'un polytope peut s'écrire comme une combinaison linéaire convexe des sommets :

$$M = \sum_i \lambda_i S_i$$

avec $\sum_i \lambda_i = 1$ et $\lambda_i \geq 0$.

Convexité

Ensemble convexe

C est convexe ssi :
pour tous points M et $M^{'}$ de C, tout point du segment $[M, M^{'}]$ appartient à C

pour tout $\lambda \in [0, 1]$

$$\lambda M + (1 - \lambda)M^{'} \in C$$

Fonction convexe

f est convexe ssi :

pour tout x et $x^{'}$ de $\mathbb{R}^n$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x^{'}) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x^{'})$$

Maximums

Proposition

Une fonction convexe f sur un polytope P a un maximum et celui-ci est obtenu sur un sommet.

Preuve : à faire

Un algorithme serait donc d'énumérer f sur les tous les sommets... mais qui peuvent être très nombreux...

Solutions d'un problème de prog. lin.

Forme normale

$$\begin{array}{rrcl} Max & z & = & c.x \\ & A\,x & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$c = (c_i) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_j)^t \in \mathbb{R}^m$,
$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- Les contraintes définissent le polyèdre
- La solution optimale est un sommet du polyèdre

Comment énumérer les sommets ?

Base et points extrêmes

Version géométrique

Exercice

A l'aide de la représentation graphique du polyèdre :

- énumérer les points intéressants (points à l'intersection de contraintes)
- énumérer les sommets admissibles (points respectant les contraintes).

Base et points extrêmes

Version algébrique

$$\begin{cases} 2x + y + e_1 = 8 \\ x + 2y + e_2 + = 7 \\ y + + e_3 = 3 \\ x, \quad y, \quad e_1, \quad e_2, \quad e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Les solutions de base admissibles les intersections de contraintes (2 variables à 0).

x	y	e_1	e_2	e_3	sol. base	admiss.	pt extrême
0	0	8	7	3	ok	ok	$(0, 0)$
...							

Principe de résolution

Principe

Toute les méthodes de résolution ont besoin d'au moins de calculer un point extrême :

solution de base liée à des variables de bases

Bases et points extrêmes

Définition formelle

- Système linéaire $Ax = b$
- A matrice de dimension $m \times n$ et rang $A = m \leq n$

Base de la matrice A

sous-matrice B de rang m de A (n'est pas unique)

B matrice $m \times m$ avec det $B \neq 0$

Posons $A = (B \ N)$

$Ax = b \ \Leftrightarrow \ (B \ N)x = b \ \Leftrightarrow \ Bx_B + Nx_N = b$

$\Leftrightarrow \ x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

Solution de base associée à B

- $x_N = 0$: variables hors base
- $x_B = B^{-1}b$: variables de base

Bases et points extrêmes

Définition formelle

- Système linéaire $Ax = b$
- A matrice de dimension $m \times n$ et rang $A = m \leq n$

Base de la matrice A

sous-matrice B de rang m de A (n'est pas unique)

B matrice $m \times m$ avec $\det B \neq 0$

Posons $A = (B \ N)$

$Ax = b \ \Leftrightarrow \ (B \ N)x = b \ \Leftrightarrow \ Bx_B + Nx_N = b$

$\Leftrightarrow \ x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

Solution de base associée à B

- $x_N = 0$: variables hors base
- $x_B = B^{-1}b$: variables de base

Problème : comment trouver une matrice B ? et x_B ?

Exemple de calcul d'une base

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+e_1 & = & 8 \\ x+2y+e_2 & = & 7 \\ y+e_3 & = & 3 \\ x,y,e_1,e_2,e_3 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Pour trouver une base, en tenter une...
Par exemple $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+e_1 & = & 8 \\ x+2y+e_2 & = & 7 \\ y+e_3 & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e_1 & = & 8-2x-y \\ e_2 & = & 7-x-2y \\ e_3 & = & 3-y \end{array}\right.$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$: variables de base et $\{x, y\}$ variables hors base

Exemple de solution de base

$\{e_1, e_2, e_3\}$: variables de base et $\{x, y\}$ variables hors base

$$\begin{cases} e_1 &= 8 - 2x - y \\ e_2 &= 7 - x - 2y \\ e_3 &= 3 - y \end{cases}$$

Pour calculer une solution de base :

- variables hors base $= 0$
- variables de base à calculer (si possible, c'est ok)

Exemple de solution de base

$\{e_1, e_2, e_3\}$: variables de base et $\{x, y\}$ variables hors base

$$\begin{cases} e_1 & = & 8 - 2x - y \\ e_2 & = & 7 - x - 2y \\ e_3 & = & 3 - y \end{cases}$$

Pour calculer une solution de base :

- variables hors base $= 0$
- variables de base à calculer (si possible, c'est ok)

Pour $x = y = 0$, on trouve :

$$\begin{cases} e_1 & = & 8 - 2x - y = 8 \\ e_2 & = & 7 - x - 2y = 7 \\ e_3 & = & 3 - y = 3 \end{cases}$$

Remarques finales

- $Ax = b$, $x \geq 0$ où $A = (B\ N)$
- $(x_B\ 0)$ est une solution de base admissible si $x_B \geq 0$
- Equivalence points de vue géométrique / algébrique :
  L'ensemble des points extrêmes du polyèdre sont les solutions de base admissibles du syst. lin.
- Nombre de points extrêmes (maximum) :
- Solutions de base dégénérés : lorsque certaines variables de base sont nulles
- Pratique : lorsque A est inversible, solution de base unique.

Remarques finales

- $Ax = b$, $x \geq 0$ où $A = (B\ N)$
- $(x_B\ 0)$ est une solution de base admissible si $x_B \geq 0$
- Equivalence points de vue géométrique / algébrique : L'ensemble des points extrêmes du polyèdre sont les solutions de base admissibles du syst. lin.
- Nombre de points extrêmes (maximum) : $\binom{n}{m}$
- Solutions de base dégénérés : lorsque certaines variables de base sont nulles
- Pratique : lorsque A est inversible, solution de base unique.

Introduction

Une idée naïve, simple mais impraticable :

- Enumérer tous les sommets
- Calculer l'objectif sur chacun eux
- Retenir le meilleur

Introduction

Une idée naïve, simple mais impraticable :

- Enumérer tous les sommets
- Calculer l'objectif sur chacun eux
- Retenir le meilleur

Cet algo termine et est correct (nombre fini), mais malheureusement très très grand.

Pourtant la géométrie du problème joue en notre faveur...

Simplexe

Algorithme du simplexe

- Dantzig, 1947
- Algo itératif de résolution de problème de programmation linéaire

Principe

A partir d'un sommet, chercher un sommet voisin qui améliore l'objectif.

Simplexe

Algorithme du simplexe

- Dantzig, 1947
- Algo itératif de résolution de problème de programmation linéaire

Principe

A partir d'un sommet, chercher un sommet voisin qui améliore l'objectif.

Propriété du problème

Soit x_0 sommet non optimum. Alors il existe x, un sommet voisin de x0, tel que $f(x) > f(x_0)$.

Donc ça marche...

Illustration

$$
\begin{array}{lrcl}
Max & z & = & 4x + 5y \\
 & 2x + y & \leq & 8 \\
 & x + 2y & \leq & 7 \\
 & y & \leq & 3 \\
 & x, y & \geq & 0
\end{array}
$$

A suivre sur votre graphique...

$x_0 = (0, 0)$ d'où $z = 0$

Illustration

$$
\begin{array}{lrcl}
Max & z & = & 4x + 5y \\
 & 2x + y & \leq & 8 \\
 & x + 2y & \leq & 7 \\
 & y & \leq & 3 \\
 & x, y & \geq & 0
\end{array}
$$

A suivre sur votre graphique...

$x_0 = (0, 0)$ d'où $z = 0$
$x_1 = (0, 3)$ d'où $z = 15$

Illustration

$$
\begin{array}{lrcl}
Max & z & = & 4x + 5y \\
 & 2x + y & \leq & 8 \\
 & x + 2y & \leq & 7 \\
 & y & \leq & 3 \\
 & x, y & \geq & 0
\end{array}
$$

A suivre sur votre graphique...

$x_0 = (0, 0)$ d'où $z = 0$
$x_1 = (0, 3)$ d'où $z = 15$
$x_2 = (1, 3)$ d'où $z = 19$

Illustration

$$
\begin{array}{lrcl}
Max & z & = & 4x + 5y \\
 & 2x + y & \leq & 8 \\
 & x + 2y & \leq & 7 \\
 & y & \leq & 3 \\
 & x, y & \geq & 0
\end{array}
$$

A suivre sur votre graphique...

$x_0 = (0, 0)$ d'où $z = 0$
$x_1 = (0, 3)$ d'où $z = 15$
$x_2 = (1, 3)$ d'où $z = 19$
$x_3 = (3, 2)$ d'où $z = 22$

Base voisine

Bases voisines

Deux sommets voisins correspondent à deux bases B et $B^{'}$ telles que qu'on remplace une variable de B par une autre pour obtenir $B^{'}$.

Passer d'un sommet à l'autre revient à changer de base (principe du "pivotage")

Algorithme du simplexe par l'exemple

Solution de base

$$\begin{cases} \text{Maximizer } z & = & 4x+5y \\ 2x+y & \leq & 8 \\ x+2y & \leq & 7 \\ y & \leq & 3 \\ x,y & \geq & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Maximizer } z & = & 4x+5y \\ 2x+y+e_1 & = & 8 \\ x+2y+e_2 & = & 7 \\ y+e_3 & = & 3 \\ x,y,e_1,e_2,e_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

Algorithme du simplexe par l'exemple

Solution de base

$$\begin{cases} \text{Maximizer } z & = & 4x+5y \\ 2x+y & \leq & 8 \\ x+2y & \leq & 7 \\ y & \leq & 3 \\ x,y & \geq & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Maximizer } z & = & 4x+5y \\ 2x+y+e_1 & = & 8 \\ x+2y+e_2 & = & 7 \\ y+e_3 & = & 3 \\ x,y,e_1,e_2,e_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

Pour trouver une base, en tenter une...
Par exemple $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\begin{cases} 2x+y+e_1 & = & 8 \\ x+2y+e_2 & = & 7 \\ y+e_3 & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 & = & 8-2x-y \\ e_2 & = & 7-x-2y \\ e_3 & = & 3-y \end{cases}$$

$\{e_1, e_2, e_3\}$: variables de base et $\{x, y\}$ variables hors base

Algorithme du simplexe par l'exemple

Solution de base

Pour calculer une solution de base :

- variables hors base $= 0$
- variables de base à calculer (si possible, c'est ok)
- Valeur de z

$\{e_1, e_2, e_3\}$: variables de base et $\{x, y\}$: variables hors base

Algorithme du simplexe par l'exemple

Solution de base

Pour calculer une solution de base :

- variables hors base $= 0$
- variables de base à calculer (si possible, c'est ok)
- Valeur de z

$\{e_1, e_2, e_3\}$: variables de base et $\{x, y\}$: variables hors base

$x = y = 0$, on trouve :

$$\begin{cases} e_1 & = & 8 - 2x - y = 8 \\ e_2 & = & 7 - x - 2y = 7 \\ e_3 & = & 3 - y = 3 \end{cases}$$

$$\text{et } z = 4x + 5y = 0$$

Changement de base

Regardons bien : $z = 4x + 5y$

Changement de base

Regardons bien : $z = 4x + 5y$

On peut faire augmenter z en faisant entrer x ou y dans la base

Changement de base

Regardons bien : $z = 4x + 5y$
On peut faire augmenter z en faisant entrer x ou y dans la base

Essayons y : quelle est la valeur maximale que pourra avoir y ?

$$\begin{cases} e_1 & = & 8 - 2x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 8 \\ e_2 & = & 7 - x - 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3.5 \\ e_3 & = & 3 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3 \end{cases}$$

Changement de base

Regardons bien : $z = 4x + 5y$
On peut faire augmenter z en faisant entrer x ou y dans la base

Essayons y : quelle est la valeur maximale que pourra avoir y ?

$$\begin{cases} e_1 & = & 8 - 2x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 8 \\ e_2 & = & 7 - x - 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3.5 \\ e_3 & = & 3 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3 \end{cases}$$

Le max de y est 3, pour $y = 3$, on obtenons
$e_1 = 5 - x$, $e_2 = 1 - x$ et $e_3 = 0$.

Changement de base

Regardons bien : $z = 4x + 5y$
On peut faire augmenter z en faisant entrer x ou y dans la base

Essayons y : quelle est la valeur maximale que pourra avoir y ?

$$\begin{cases} e_1 & = & 8 - 2x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 8 \\ e_2 & = & 7 - x - 2y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3.5 \\ e_3 & = & 3 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 3 \end{cases}$$

Le max de y est 3, pour $y = 3$, on obtenons
$e_1 = 5 - x$, $e_2 = 1 - x$ et $e_3 = 0$.

Nouvelle base candidate :
$\{e_1, e_2, e_3\} \cup \{y\} \setminus \{e_3\} = \{e_1, e_2, y\}$

Nouvelle base $\{e_1, e_2, y\}$

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_1 & = & 8-2x-y \\ e_2 & = & 7-x-2y \\ e_3 & = & 3-y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} e_1 & = & 5-2x+e_3 \\ e_2 & = & 1-x+2e_3 \\ y & = & 3-e_3 \end{array}\right.$$

z en fonction des variables hors base :
$z = 4x + 5y = 15 + 4x - 5e_3$

Solution de base associée :
$x = e_3 = 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_1 & = & 5-2x+e_3 = 5 \\ e_2 & = & 1-x+2e_3 = 1 \\ y & = & 3-e_3 = 3 \end{array}\right.$$

et $z = 15$.

Nouvelle itération

$$z = 15 + 4x - 5e_3$$

Augmenter encore z ?

Nouvelle itération

$$z = 15 + 4x - 5e_3$$

Augmenter encore z ? Faire entrer x

Quelle est la valeur maximale que pourra avoir x ?

$$\begin{cases} e_1 & = & 5 - 2x + e_3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 2.5 \\ e_2 & = & 1 - x + 2e_3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ y & = & 3 - e_3 \geq 0 \Rightarrow \text{pas de contrainte} \end{cases}$$

Nouvelle itération

$$z = 15 + 4x - 5e_3$$

Augmenter encore z ? Faire entrer x

Quelle est la valeur maximale que pourra avoir x ?

$$\begin{cases} e_1 & = & 5 - 2x + e_3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 2.5 \\ e_2 & = & 1 - x + 2e_3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ y & = & 3 - e_3 \geq 0 \Rightarrow \text{pas de contrainte} \end{cases}$$

Le max de x est 1, et e_2 peut sortir de la base

Nouvelle itération

$$z = 15 + 4x - 5e_3$$

Augmenter encore z ? Faire entrer x

Quelle est la valeur maximale que pourra avoir x ?

$$\begin{cases} e_1 &= 5 - 2x + e_3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 2.5 \\ e_2 &= 1 - x + 2e_3 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ y &= 3 - e_3 \geq 0 \Rightarrow \text{pas de contrainte} \end{cases}$$

Le max de x est 1, et e_2 peut sortir de la base

Nouvelle base candidate : $\{e_1, x, y\}$

$$\begin{cases} e_1 &= 3 + 2e_2 - 3e_3 \\ x &= 1 - e_2 + 2e_3 \\ y &= 3 - e_3 \\ z &= 19 - 4e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

Nouvelle itération

$$z = 19 - 4e_2 + 3e_3$$

Augmenter encore z ?

Nouvelle itération

$$z = 19 - 4e_2 + 3e_3$$

Augmenter encore z ? Faire entrer e_3

Quelle est la valeur maximale que pourra avoir e_3 ?

$$\begin{cases} e_1 & = & 3 + 2e_2 - 3e_3 \geq 0 \Rightarrow e_3 \leq 1 \\ x & = & 1 - e_2 + 2e_3 \geq 0 \Rightarrow \text{pas de contrainte} \\ y & = & 3 - e_3 \geq 0 \Rightarrow e_3 \leq 3 \end{cases}$$

Nouvelle itération

$$z = 19 - 4e_2 + 3e_3$$

Augmenter encore z ? Faire entrer e_3

Quelle est la valeur maximale que pourra avoir e_3 ?

$$\begin{cases} e_1 & = & 3 + 2e_2 - 3e_3 \geq 0 \Rightarrow e_3 \leq 1 \\ x & = & 1 - e_2 + 2e_3 \geq 0 \Rightarrow \text{pas de contrainte} \\ y & = & 3 - e_3 \geq 0 \Rightarrow e_3 \leq 3 \end{cases}$$

Le max de e_3 est 1, et e_1 peut sortir de la base

Nouvelle itération

$$z = 19 - 4e_2 + 3e_3$$

Augmenter encore z ? Faire entrer e_3

Quelle est la valeur maximale que pourra avoir e_3 ?

$$\begin{cases} e_1 & = & 3 + 2e_2 - 3e_3 \geq 0 \Rightarrow e_3 \leq 1 \\ x & = & 1 - e_2 + 2e_3 \geq 0 \Rightarrow \text{pas de contrainte} \\ y & = & 3 - e_3 \geq 0 \Rightarrow e_3 \leq 3 \end{cases}$$

Le max de e_3 est 1, et e_1 peut sortir de la base

Nouvelle base candidate : $\{e_3, x, y\}$

$$\begin{cases} e_3 & = & 1 + 2/3e_2 - 1/3e_1 \\ x & = & 3 + 1/3e_2 + 2/3e_1 \\ y & = & 2 - 2/3e_2 + 1/3e_1 \\ z & = & 22 - 2e_2 - e_1 \end{cases}$$

Terminaison

$$z = 22 - 2e_2 - e_1$$

donc $z^* \leq 22$

Or la solution de base $x = 3$, $y = 2$ et $e_3 = 1$ permet d'obtenir le max $z = 22$

Donc on a trouvé l'optimum

Suite du cours...

Cours de recherche opérationnelle, Nadia Brauner, IMAG.
http://pagesperso.g-scop.grenoble-inp.fr/~braunern/RO.pdf, slide p.156.

Démarage difficile

Démarrage facile

L'algorithme du simplexe nécessite de démarrer avec une base vérifiant :

- le programme linéaire est sous forme canonique par rapport à la base
- la base réalisable : les éléments de la dernière colonne sont positifs ou nuls
- la case en haut à droite est égale à $z(0, \ldots, 0)$

Comment faire lorsque la colonne de gauche n'est pas positive ou nulle ?

Démarage difficile

Démarrage facile

L'algorithme du simplexe nécessite de démarrer avec une base vérifiant :

- le programme linéaire est sous forme canonique par rapport à la base
- la base réalisable : les éléments de la dernière colonne sont positifs ou nuls
- la case en haut à droite est égale à $z(0, \ldots, 0)$

Comment faire lorsque la colonne de gauche n'est pas positive ou nulle ?

Résolution d'un problème auxilière...

Explication par l'exemple

$$\begin{cases} -x - y & = & z\ [max] \\ -3x - 4y & \leq & -12 \\ 2x + y & \leq & 4 \\ x, y & \geq & 0 \end{cases}$$

Introduction des variables d'écart :

$$\begin{cases} -x - y & = & z\ [max] \\ 3x + 4y - e_1 & = & 12 \\ 2x + y + e_2 & = & 4 \\ x, y, e_1, e_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Le système n'est pas sous forme standard (coefficient négatif pour e_1)

Explication par l'exemple

$$\begin{cases} -x - y & = & z\ [max] \\ 3x + 4y - e_1 & = & 12 \\ 2x + y + e_2 & = & 4 \\ x, y, e_1, e_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Problème linéaire associé :

$$\begin{cases} e_3 & = & w\ [min] \\ 3x + 4y - e_1 + e_3 & = & 12 \\ 2x + y + e_2 & = & 4 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

- Introduction d'une variable e_3 à la ligne qui ne satisfait pas l'admissibilité
- (e_2, e_3) est une base admissible
- Problème équivalent lorsque e_3 est nul.
- Exprimer l'objectif en fonction des variables hors base :

$$-e_3 = 3x + 4y - e_1 - 12$$

Explication par l'exemple

$$\begin{cases} 3x + 4y - e_1 - 12 & = & w\ [max] \\ 3x + 4y - e_1 + e_3 & = & 12 \\ 2x + y + e_2 & = & 4 \\ x, y, e_1, e_2, e_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

En résolvant on trouve la base admissible (y, e_2) avec la solution de base : $(0\ 3\ 0\ 1\ 0)^t$

On obtient une première base réalisable en supprimant e_3 et utilisant la base (y, e_2) :

$$\begin{cases} -x - y & = & z\ [max] \\ 3/4x + y - 1/4e_1 & = & 3 \\ 5/4x + 1/4e_1 + e_2 & = & 1 \\ x, y, e_1, e_2 & \geq & 0 \end{cases}$$