Programmation Linéaire 2

Master 1 I2L
2014 / 2015

Cette feuille d'exercice est conçue à partir de celle de Denis Lugiez, Université de Provence, Aix-Marseille I.

1 Méthode du pivot de Gauss

Questions :

a - Résoudre le système linéaire à 4 inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & y & +t & +z & = & 1 \\ x & -y & +t & -z & = & -1 \\ 2x & -y & & +z & = & 8 \\ & y & -t & +z & = & 3 \end{array}\right.$$

b - Résoudre le système linéaire à 4 inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & y & +t & +z & = & 1 \\ x & -y & +t & -z & = & -1 \\ 2x & -y & & +z & = & 8 \\ & 2y & -t & +4z & = & 11 \end{array}\right.$$

c - Pour quelles valeurs du paramètre a, le système linéaire suivant :

— n'a-t-il aucune solution ?
— a-t-il une seule solution ?
— a-t-il une infinité de solutions ?

$$\left\{\begin{array}{cccccc} -x & -3y & +5z & = & 5 \\ -x & -2y & +az & = & 4 \\ -2x & +ay & -4z & = & 7 \end{array}\right.$$

d - Ecrire sous forme matricielle le système linéaire de la question (a).

e - Quelle autre méthode permet de résoudre le système linéaire ?

2 Jeu Pierre/Feuille/Ciseaux

Le jeu Pierre/Feuille/Ciseaux est un jeu à 2 joueurs à somme nulle. Le gain est $+1$ si gagnant, 0 en cas d'égalité et -1 dans le cas perdant.

But : Trouver la stratégie optimale au jeu pour des joueurs ne mémorisant pas les parties précédentes (pas d'historique pour prendre la décision du jeu).

Les variables de décisions pourront être les suivantes : le joueur A joue Pierre avec le taux x_P, joue Feuille avec le taux x_F et joue Ciseau avec le taux x_C.

Questions :

2.a Exprimer l'espérance du gain du joueur A lorsque le joueur B joue Pierre.

2.b De même, exprimer l'espérance du joueur A lorsque le joueur B joue Feuille et lorsque le joueur B joue Ciseaux.

2.c En supposant que le joueur B joue une stratégie optimale. Exprimer l'espérance du gain du joueur A.

2.d Transformer le problème en un problème linéaire en utilisant la propriété suivante :
$M \leq a$ et $M \leq b$ ssi $M \leq \min(a, b)$

2.e Résoudre le problème à l'aide AMPL.

3 Régime alimentaire de l'élan (d'après D. Lugiez)

Les différents chercheurs ayant étudiés l'élan ont relevé les caractéristiques suivantes. L'élan se nourrit dans 2 types de milieu, en forêt, où il broute les feuilles, et dans les lacs, où il recherche des plantes aquatiques. Ces dernières sont riches en sodium mais peu énergiques, tandis que les plantes terrestres pauvres en sodium ont un contenu relativement plus élevé en énergie. L'élan a besoin à la fois d'énergie et de sodium pour survivre et se reproduire : son régime alimentaire est donc mixte. La quantité de nourriture qu'il peut absorber en une journée est limitée par la capacité de sa poche stomacale : 19 litres.

Dans cet exercice, il s'agit déterminer le meilleur régime alimentaire de l'élan en supposant qu'il maximise l'absorption d'énergie tout en survivant.

L'analyse de ces plantes a permis d'effectuer les mesures suivantes :

- Volume massique :
  - pour les plantes terrestres : 0,9 litres / kg
  - pour les plantes aquatiques : 1,3 litres / kg
- Teneur en sodium :
  - pour les plantes terrestres : 0 mg / kg
  - pour les plantes aquatiques : 4 mg / kg
- Teneur énergétique :
  - pour les plantes terrestres : 2900 kilocalories / kg
  - pour les plantes aquatiques : 2750 kilocalories / kg

L'élan a besoin d'absorber quotidiennement un minimum de 16 mg de sodium. Il a également besoin quotidiennement d'un minimum de 48 000 kilocalories pour survivre. Modéliser le problème du régime alimentaire de l'élan cherchant à maximiser son énergie.

Cet exercice est inspiré de l'étude réalisée par G. E. Belovsky en 1978 et publiée dans "An introduction to behavioral ecology" de Krebs et Davis. Ses observations d'une population d'élans prés du lac supérieur dans le Michigan ont confirmé les résultats obtenus ci-dessus.

Question :

Modéliser en problème de programmation linéaire et résoudre à l'aide de ampl.

4 Affectation de bureau

Un organisme va emménager dans de nouveaux locaux. Ceux-ci se composent de n bureaux identiques alignés du même coté du couloir avec les portes au centre du mur adjacent au couloir. L'organisme a effectué dans les anciens locaux des statistiques sur les va-et-vients entre les n services à installer dans les n bureaux et $c_{i,j}$ est le nombre de fois où des employés de i vont en j.

Questions :

4.a Modéliser à l'aide de permutations le problème qui consiste à placer les services dans les bureaux de manière à minimiser la somme des distances parcourues par les employés.

4.b Modéliser à l'aide de variables binaires : $x_{i,j} = 1$ si le service i occupe le bureau j, et $x_{i,j} = 0$ sinon.

4.c Résoudre le problème à l'aide de ampl.

5 Planification de CPU

10 taches doivent être exécutées sur 3 CPUs aux vitesses 1.33, 3 et 2.66 GHz (chaque processeur ne peut exécuter qu'une tache à la fois). Le nombre d'opérations élémentaires de chaque tache est le suivant (en milliard d'instructions) :

process	1	2	3	4	5	6	7
MI	1.1	2.1	3	1	0.7	5	3

Planifier les taches aux processeurs de telle manière que le temps total soit minimum. Résoudre ce problème avec AMPL.