Algorithme du simplexe

Master 1
2014 / 2015

1 Applications

a -

$$\begin{cases} \max z = & \frac{3}{2}x_1 + x_2 & \\ 2x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 12 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Mise sous forme de tableau : On ajoute les variables d'écart pour obtenir la forme standard. A noter les coefficients négatifs de la première ligne z puisque $z - \frac{3}{2}x_1 - x_2 = 0$. Les variables de bases sont (e_1, e_2, e_3, e_4) puisque $x_1 = x_2 = 0$ est une solution admissible du système (les valeurs de e_1, e_2, e_3 et e_4 sont bien positives lorsque $x_1 = x_2 = 0$).

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
z	1	$-3/2$	-1					0
e_1		$\boxed{2}$	-1	1				4
e_2		-1	1		1			1
e_3		-1	2			1		4
e_4		2	1				1	12

Choix du pivot : colonne x_1 qui correspond au plus nombre négatif $(-3/2)$ sur la ligne z ; et ligne e_1 qui correspond au plus petit rapport entre les nombres de la colonne des constantes et les nombres de la colonne pivot qui sont strictement positifs (4/2 est plus petit que 12/2).
Ensuite, technique du pivot de Gauss pour éliminer les nombres dans la colonne du pivot. Les coefficients sont indiqués à droite du tableau. On obtient le tableau suivant. La variable x_1 devient une variable de base à la place de e_1.

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4		
z	1		-7/4	3/4				3	$\leftarrow L_z + \frac{3}{2}.\frac{1}{2}.L_{e_1}$
x_1		1	-1/2	1/2				2	$\leftarrow \frac{1}{2}.L_{e_1}$
e_2			1/2	1/2	1			3	$\leftarrow L_{e_2} + \frac{1}{2}.L_{e_1}$
e_3			3/2	1/2		1		6	$\leftarrow L_{e_3} + \frac{1}{2}.L_{e_1}$
e_4			$\boxed{2}$	-1			1	8	$\leftarrow L_{e_4} - L_{e_1}$

Choix du pivot : colonne x_2 qui correspond au plus nombre négatif $(-7/4)$ sur la ligne z ; et ligne e_4 qui correspond l'un des plus petits rapports entre les nombres de la colonne des constantes et les nombres de la colonne pivot qui sont strictement positifs. En cas d'égalité, ici par exemple avec la ligne e_3, on peut choisir l'une des lignes au choix.
Ensuite, technique du pivot de Gauss pour éliminer les nombres dans la colonne du pivot. Les coefficients sont indiqués à droite du tableau. La ligne e_4 est multipliée par 1/2 pour obtenir un coefficient 1 dans la colonne x_2. On obtient donc le tableau suivant. On obtient donc le tableau suivant. La variable x_2 devient une variable de base à la place de e_4.

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4		
z	1			-1/8			7/8	10	$\leftarrow L_z + \frac{7}{4}.\frac{1}{2}.L_{e_4}$
x_1		1		1/4			1/4	4	$\leftarrow L_{x_1} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.L_{e_4}$
e_2				3/4	1		-1/4	2	$\leftarrow L_{e_2} - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.L_{e_4}$
e_3				$\boxed{5/4}$		1	-3/4	0	$\leftarrow L_{e_3} - \frac{3}{2}.\frac{1}{2}.L_{e_4}$
x_2			1	-1/2			1/2	4	$\leftarrow \frac{1}{2}.L_{e_4}$

Choix du pivot : colonne e_1 qui correspond au plus nombre négatif $(-1/8)$ sur la ligne z ; et ligne e_3 qui correspond au plus petit rapport (0) entre les nombres de la colonne des constantes et les nombres de la colonne pivot qui sont strictement positifs.
Ensuite, technique du pivot de Gauss pour éliminer les nombres dans la colonne du pivot. Les coefficients sont indiqués à droite du tableau. La variable e_1 devient une variable de base à la place de e_3.

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4		
z	1					1/10	32/40	10	$\leftarrow L_z + \frac{4}{5}.\frac{1}{8}.L_{e_3}$
x_1		1				?	?	4	$\leftarrow L_{x_1} - \frac{4}{5}.\frac{1}{4}.L_{e_3}$
e_2					1	?	?	2	$\leftarrow L_{e_2} - \frac{4}{5}.\frac{3}{4}.L_{e_3}$
e_1				5/4		1	-3/4	0	
x_2			1			?	?	4	$\leftarrow L_{x_2} + \frac{4}{5}.\frac{1}{2}.L_{e_3}$

La premier ligne z ne contient que des nombres positifs. z ne peut plus être augmentée, l'algorithme s'arrête. La valeur maximale de z est obtenue pour $e_3 = e_4 = 0$, et l'on obtient un maximum de 10. On en déduit également les valeurs de $x_1 = 4$ et $x_2 = 4$. On remarque que les valeurs ? n'avaient pas besoin d'être calculées puisque e_3 et e_4 sont nuls.

b -

$$\begin{cases} \max z = & 2x_1 + x_2 & \\ 2x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 12 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Les étapes de l'algorithme du simplexe :

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
z	1	-2	-1					0
e_1		$\boxed{2}$	-1	1				4
e_2		-1	1		1			1
e_3		-1	2			1		4
e_4		2	1				1	12

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4		
z	1		-2	1				4	$(z) + (e_1)$
x_1		1	-1/2	1/2				2	$\frac{1}{2}(e_1)$
e_2			1/2	1/2	1			3	$(e_2) + \frac{1}{2}(e_1)$
e_3			3/2	1/2		1		6	$(e_3) + \frac{1}{2}(e_1)$
e_4			$\boxed{2}$	-1			1	8	$(e_4) - (e_1)$

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4		
z	1			0			1	12	$(z) + (e_4)$
x_1		1		?			?	4	$(x_1) + \frac{1}{4}(e_4)$
e_2				?	1		?	5	$(e_2) - \frac{1}{4}(e_4)$
e_3				?		1	?	6	$(e_3) - \frac{3}{2}\frac{1}{2}(e_4)$
x_2			1	-1/2			1/2	4	$\frac{1}{2}(e_4)$

Le maximum est 12, atteint lorsque $e_1 = e_4 = 0$. On obtient donc les valeurs $x_1 = 4$ et $x_2 = 4$.

c -

$$\begin{cases} \max z = & -x_1 + 2x_2 & \\ 2x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 12 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Les étapes de l'algorithme du simplexe :

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	
z	1	1	-2					0
e_1		2	-1	1				4
e_2		-1	$\boxed{1}$		1			1
e_3		-1	2			1		4
e_4		2	1				1	12

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4		
z	1	-1			2			2	$(z) + 2.(e_2)$
e_1		1		1	1			5	$(e_1) + (e_2)$
x_2		-1	1		1			1	
e_3		1			-2	1		2	$(e_3) - 2.(e_2)$
e_4		3			-1		1	11	$(e_4) - (e_2)$

	z	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4		
z	1				0	1		4	$(z) + (e_3)$
e_1				1	?	?		3	$(e_1) - (e_3)$
x_2			1		?	?		3	$(e_2) + (e_3)$
x_1		1			-2	1		2	
e_4					?	?	1	5	$(e_4) - 3.(e_3)$

Le maximum est 4, atteint lorsque $e_2 = e_3 = 0$. On obtient donc les valeurs $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.