

Optimisation numérique et Stratégies d'évolution (1)

Master 1
2016 / 2017

Pour répondre aux questions, vous pouvez mener des recherches dans le cours ainsi que sur le web.

Le code doit être écrit en R. Vous trouverez par exemple de l'aide ici : <http://www.duclert.org/Aide-memoire-R/Le-langage/Introduction.php>.

Exercice 1 : Dimensionnalité, espace \mathbb{R}^n

Ces questions ont pour but d'explorer les distances et les volumes en dimension n .

Questions :

- a - Calculer en fonction de n la distance (euclidienne) entre les points de coordonnées $x = (0.2, 0.2, \dots, 0.2)$ et $y = (0.8, 0.8, \dots, 0.8)$ appartenant à \mathbb{R}^n . Que vaut la distance lorsque n tend vers l'infini ?
- b - Un cube de \mathbb{R}^n a pour coté 0.1. Quel est son volume en fonction de n ? Que vaut le volume lorsque n tend vers l'infini ?
- c - Une boule de \mathbb{R}^n a pour rayon l'unité. Quel est son volume en fonction de n ? Comparer les volumes lorsque $n = 2, 3, 10, 100$.

Exercice 2 : Gradient et direction de descente

Le but est de (re)découvrir le gradient.

Questions :

- a - Calculer la fonction dérivée de $x \mapsto (x - 3)^2$ et calculer les valeurs de la dérivée pour 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- b - Calculer le gradient de la fonction $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2$ pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
- c - Comment peut-on trouver des directions de descente à l'aide du gradient ?

Exercice 3 : Descente de gradient

Question :

- a - Utiliser l'algorithme de descente de gradient pour minimiser à 10^{-6} près $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2$.

Exercice 4 : Méthode de Newton

Le but est de découvrir une méthode d'optimisation numérique pour les fonctions réelles d'une variable.

Questions :

- a - Utiliser la méthode de Newton pour résoudre numériquement à 10^{-6} près l'équation $f(x) = 0$ où $f(x) = -x^3 + x^2 - 2x + 5$
- b - Comment peut-on utiliser la méthode de Newton pour trouver les minimaux d'une fonction ?
- c - Rechercher le minimum de la fonction $f(x) = 10x^4 - 20x^3 - 90x^2 + 20x + 80$ en utilisant la méthode de Newton.

Exercice 5 : Séparabilité

Le but est de découvrir la notion de séparabilité.

Questions :

- a - Parmi ces fonctions suivantes, quelle fonction semble être la plus facile à maximiser ?

$$f_1(x) = (3x_1 + x_2 - 1)^2 + (-2x_1 + x_2 - 1)^2 + 1$$

$$f_2(x) = \cos\left(\frac{(x_1 - 0.5)^2(x_1 + 1) + 1}{x_1 + 1}\right) + \sqrt{\exp((x_2 - 0.25)^2) + 1}$$

pour $x \in [0, 1]^2$.

- b - Trouver une approximation du maximum de f_2 par la méthode de Newton à 10^{-6} près.