

Fiche 01 :
Dénombrabilité, mot et langage

Master 1 I2L
2014 / 2015

Exercice 1 : Fonctions injectives/surjectives

Sous forme de diagramme en "patate" (diagramme de Venn), donner un exemple :

- a - de fonction injective mais non surjective,
- b - de fonction surjective mais non injective,
- c - de fonction ni injective, ni surjective.

Exercice 2 : Cardinalité

- a - Montrer que l'ensemble des entiers de 0 à 5 est plus petit que l'ensemble des entiers de 2 à 10.
- b - Montrer qu'il y a autant d'entiers naturels que d'entiers plus grand ou égale à 5.
- c - Montrer qu'il y a autant de nombres pairs que de nombres impairs.

Exercice 3 : Ensembles dénombrables

- a - Combien d'ensemble peut former à partir d'un ensemble fini de n éléments? Autrement dit, quel est le cardinal de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(X)$ d'un ensemble fini X de cardinal n .
- b - Montrer que l'ensemble des entiers \mathbb{Z} est dénombrable.
- c - Montrer que l'ensemble \mathbb{N}^2 est dénombrable.
- d - Pourquoi l'ensemble des programmes est dénombrable?

Exercice 4 : Tous les mots (S. Julia)

Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Parmi les expressions régulières suivantes, indiquez celle qui décrivent le langage Σ^* .

1. $(a^*b)^* + (b^*a)^*$
2. $(a + b + \epsilon)^+$
3. $a^* + a^*(ba^*)^+$
4. $(a^*b^+ + b^*a^+)^*$
5. $a(a + b)^* + b(a + b)^*$

6. $(a^*b^*)^+$
7. $(\epsilon + b)^*. (ab^*)^*$
8. $a^*(b^+a^+)^*b^*$
9. $(a + b + \emptyset)^*$

Exercice 5 : Expressions régulières

Donner les expressions régulières qui décrivent exactement les langages suivants :

- l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b, c, d, e\}$ qui commencent par a et finissent par c .
- l'ensemble des mots sur l'alphabet latin qui ne commencent pas par une voyelle, et contiennent au moins 5 lettres.