

# Introduction aux problèmes d'optimisation et à la modélisation

Recherche Opérationnelle et Optimisation  
Master 1 I2L / ISIDIS

SÉBASTIEN VEREL

verel@lisic.univ-littoral.fr

<http://www-lisic.univ-littoral.fr/~verel>

Université du Littoral Côte d'Opale  
Laboratoire LISIC  
Equipe OSMOSE

# Information

But, évaluation, objectifs, support de cours, bibliographie :

cf. siteweb

# Plan

- 1 Problèmes d'optimisation combinatoire
- 2 Problèmes d'optimisation numérique
- 3 Optimisation

# Recherche Opérationnelle, méthode d'optimisation

## Origine historique de la recherche opérationnelle (RO)

- Expression utilisée au Royaume-Unis
- Seconde guerre mondiale (1938, Royal Air Force)
- Optimisation des *opérations* militaires
- Recueil données station radar, gestion des avions, stratégie sous-marins allemand

## Définition contemporaine de RO

Modélisation mathématique d'un problème,  
puis résoudre ce problème à l'aide d'une méthode informatique

# Problème d'optimisation

## Problème d'optimisation

Un **problème d'optimisation** est un couple  $(\mathcal{X}, f)$  avec :

- Espace de recherche : ensemble des solutions possibles,

$$\mathcal{X}$$

- fonction objectif : critère de qualité (ou de non-qualité)

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

## Résoudre un problème d'optimisation

Trouver la (ou les) meilleure solution selon le critère de qualité

$$x^* = \operatorname{argmax}_{\mathcal{X}} f$$

(dans le cas de maximisation)

# Résoudre des problèmes du monde réel

## Exemple de problème du monde réel

Des produits sont dans un entrepôt.

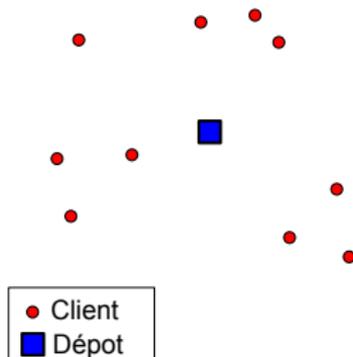
But : Livrer les produits à tous les clients.

# Résoudre des problèmes du monde réel

## Exemple de problème du monde réel

Des produits sont dans un entrepôt.

But : Livrer les produits à tous les clients.



## Problème abstrait

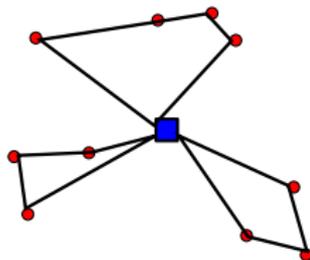
But : Minimiser la distance (le coût) parcourue en respectant les contraintes horaires

# Résoudre des problèmes du monde réel

## Exemple de problème du monde réel

Des produits sont dans un entrepôt.

But : Livrer les produits à tous les clients.



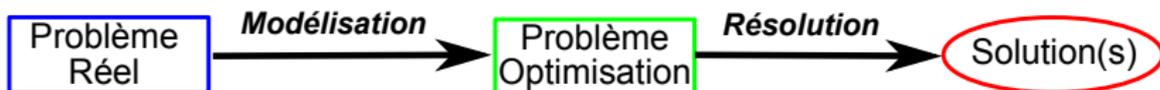
## Problème abstrait

But : Minimiser la distance (le coût) parcourue en respectant les contraintes horaires

# Une méthodologie de résolution de problème

## Principe

Transformer un problème réel en un problème d'optimisation



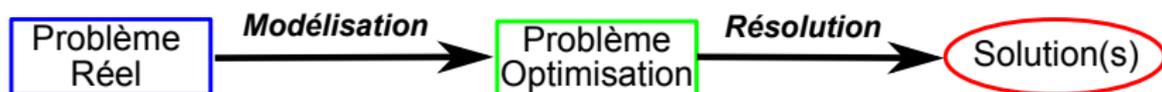
Modéliser :

- Abstraire la réalité
- Simplifier la réalité (nombre de paramètres, “bruit”, défauts,...)
- Garder les éléments pertinents par rapport au problème à résoudre

# Une méthodologie de résolution de problème

## Principe

Transformer un problème réel en un problème d'optimisation



Concevoir un (bon) modèle :

- Connaissance experte du domaine
- Connaissance des méthodes de résolution (informatique)

# Problème d'optimisation

## Problème d'optimisation

Un **problème d'optimisation** est un couple  $(\mathcal{X}, f)$  avec :

- Espace de recherche : ensemble des solutions possibles,

$$\mathcal{X}$$

- fonction objectif : critère de qualité (ou de non-qualité)

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

## Résoudre un problème d'optimisation

Trouver la (ou les) meilleure solution selon le critère de qualité

$$x^* = \operatorname{argmax}_{\mathcal{X}} f$$

# Problème d'optimisation

## Problème d'optimisation

Un **problème d'optimisation** est un couple  $(\mathcal{X}, f)$  avec :

- Espace de recherche : ensemble des solutions possibles,

$$\mathcal{X}$$

- fonction objectif : critère de qualité (ou de non-qualité)

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

## Résoudre un problème d'optimisation

Trouver la (ou les) meilleure solution selon le critère de qualité

$$x^* = \operatorname{argmax}_{\mathcal{X}} f$$

*Mais, des fois, l'ensemble de toutes les meilleures solution, ou une bonne approximation, ou une solution "robuste", etc.*

# Contexte

## Optimisation boîte noire (Black box)

Nous ne pouvons connaître que  $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots\}$  donnés par un "oracle"

Aucune information sur la définition de la fonction objectif  $f$  n'est soit disponible ou soit nécessaire



- Fonction objectif donnée par un calcul ou une simulation
- Fonction objectif peut être irrégulière, non différentielle, non continue, etc.

# Typologie des problèmes d'optimisation

## Classification

- **Optimisation combinatoire** : Espace de recherche dont les variables sont discrètes (cas NP-difficile)
- **Optimisation numérique (continue)** : Espace de recherche dont les variables sont continues
- **N'entrant pas dans les deux autres catégories** : combinaison discret/continue, programme, morphologie, topologie, etc.

## Détour ou retour : Notion de complexité

cf. cours en annexe : Notion de complexité pour comprendre les problèmes NP-complet, NP-difficile

## Exemple de problèmes d'optimisation

La suite est une liste de problèmes d'optimisation combinatoire

# Sudoku

5	3			7			
6			1	9	5		
	9	8					6
8				6			3
4			8		3		1
7				2			6
	6					2	8
			4	1	9		5
				8			7
						7	9

## Questions :

- Calculer le nombre de grilles (solutions) possibles au sudoku.
- Calculer le temps de traitement par l'ensemble des ordinateurs sur Terre de ces solutions à l'aide d'un algorithme "itératif".

# Problème SAT

Premier problème NP-difficile (Cook, 1971)

- $n$  variables booléennes :  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- littéral :  $l = x_i$  ou  $l = \bar{x}_i$
- $m$  clauses (disjonction de littéraux) :  $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$
- $k_j$  littéraux par clause  $C_j$  :  $\{l_{1,j}, l_{2,j}, \dots, l_{k_j,j}\}$  :  
$$C_j = \bigvee_{i=1}^{k_j} l_{i,j}$$

Trouver l'affectation des variables telle la conjonction des clauses soit vraie :

$$\bigwedge_{j=1}^m C_j$$

(cas spécial,  $k$ -SAT lorsque  $k_j = k$ )

# SAT : Applications

Vérification de circuits (model checking), logique, planification, informatique...

cf. solver IBM, etc.

# Planification avec SAT

## Planification classique

$n$  : Longueur maximale du plan.

Pour toute variable d'état  $v$  et  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  : variables  $v^i$ .  
 $v^i$  vraie lorsque  $v$  vraie après l'action numéro  $i$ .

Pour toute action  $a$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  : variables  $a^i$ .  
 $a^i$  vraie lorsque l'action numéro  $i$  est  $a$ .

## Exercice

Traduire par une formule SAT :

- " L'action  $a$  fait passer la variable  $v$  à vraie lorsque celle-ci est fausse".
- " Lorsque le système est dans l'état  $e$  et que l'action  $a$  s'effectue alors le système passe dans l'état  $f$ ".

# Planification avec SAT

## Exercice

- Rechercher à l'aide du web ou de votre expérience des exemples de planification.

## Exercice

- Dessiner un (très) petit labyrinthe.
- 2 souris doivent sortir de ce labyrinthe mais ne peuvent occuper un même couloir en même temps.
- Traduire ce problème de planification en problème SAT.

## Exercice

- Faire traverser "Le Loup, la Chèvre et les choux" sur un bateau avec son fermier...

# De SAT au problème d'optimisation Max-SAT

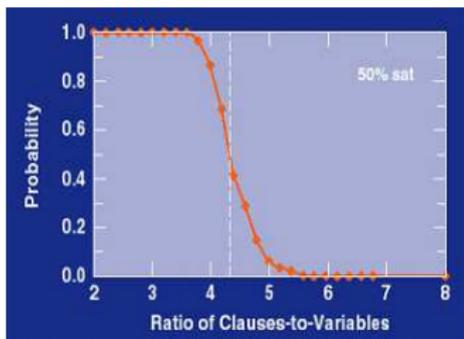
Maximiser le nombre de clauses  $C_j$  vérifiées

$$f(x) = \#\{C_j : C_j(x) \text{ est vraie}\}$$

$x$  est une solution de SAT ssi  $f(x) = m$

# SAT : Propriétés physiques !

référence bib



Transition de phase suivant :

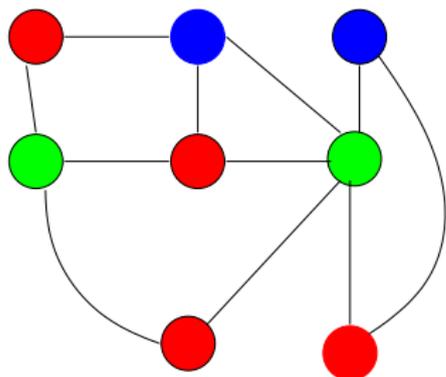
$$\alpha = \frac{m}{N} = \frac{\text{nombre de clauses}}{\text{nombre de variables}}$$

- Si  $\alpha < \alpha_c$  alors forte probabilité qu'une instance aléatoire ait une solution
- Si  $\alpha_c < \alpha$  alors faible probabilité qu'une instance aléatoire ait une solution

... analogie avec la transition de phase entre eau et glace autour de  $0^\circ\text{C}$ .

$\alpha_c$  temp. critique

# Coloration de graphe

**Graphe :**

$G = (S, A)$  avec  $S$  ens. des sommets et  
 $A \subset S^2$  ens. des arcs

**Coloration :**

affectation d'une couleur à chaque noeud

$$\alpha : S \rightarrow C \text{ avec } C = \{c_1, \dots, c_k\}$$

Trouver une ( $k$ -)coloration telle que :

$$\text{si } (s, t) \in A \text{ alors } \alpha(s) \neq \alpha(t)$$

*Applications* : affectation de fréquence en téléphonie mobile, emploi du temps, coloration des cartes...

# Coloration de graphe

## Affectation de fréquences

### Exercice

Des émetteurs radio sont disposés dans l'espace géographique. Pour éviter les interférences, ils ne peuvent diffuser sur la même fréquence si leur distance est inférieure à une constante  $D$ .

Traduire ce problème en problème de coloration de graphe.

# sudoku : coloration de graphe ?

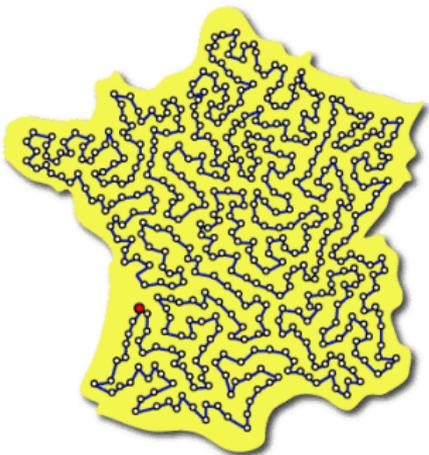
5	3			7			
6			1	9	5		
	9	8					6
8				6			3
4			8		3		1
7				2			6
	6					2	8
			4	1	9		5
				8			7
						7	9

## Exercice

Traduire le problème de sudoku en un problème de coloration de graphe.

# Voyageur de commerce (TSP)

Trouver le parcours le plus court passant par toutes les villes.



- $n$  : nombre de villes
- $d_{rs}$  : distance entre les villes  $r$  et  $s$ .

# Voyageur de commerce (TSP)

Trouver le parcours le plus court passant par toutes les villes.



- $n$  : nombre de villes
- $d_{rs}$  : distance entre les villes  $r$  et  $s$ .

## Exercice

Exprimer la fonction à optimiser en fonction des paramètres du problème.

# Quadratic Assignment Problem (QAP)

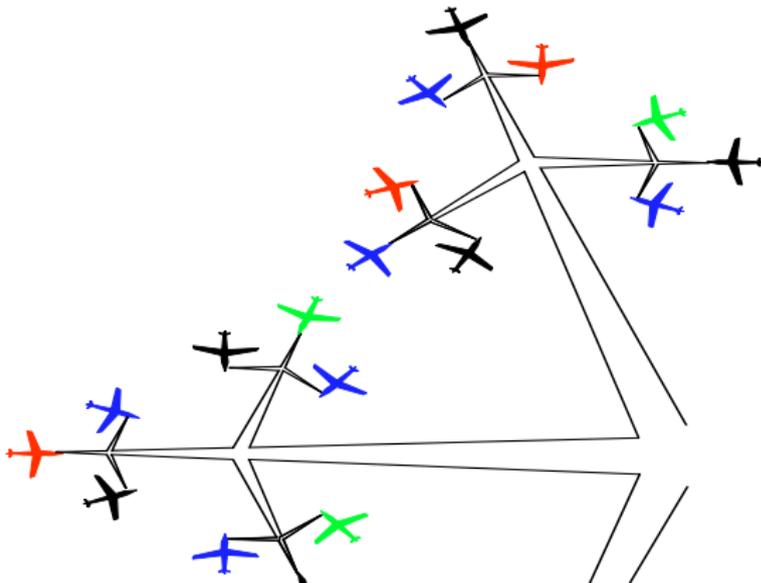
Problème d'affectation quadratique

Minimiser le flux total

(Exemple d'après Taillard).



AFFECTATION QUADRATIQUE



<http://mao.uclouvain.be>

à chaque avion ?

# Quadratic Assignment Problem (QAP)

Minimiser le flux total

- $n$  objets,  $n$  emplacements
- $f_{ij}$  : flot entre objets  $i$  et  $j$ ,
- $d_{rs}$  : distance entre emplacement  $r$  et  $s$

Applications : répartition de batiments ou de servives, affectation des portes d'aéroport, placement de modules logiques, claviers...

# Quadratic Assignment Problem (QAP)

## Exercice

Traduire le problème en un problème d'optimisation en exprimant la fonction à optimiser.

# Vehicule Routing Problem (VRP)

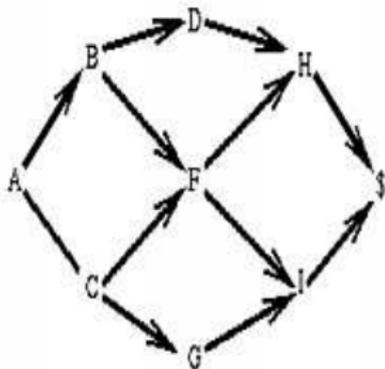
But : transporter des biens à des clients

Véhicule à capacité limitée, fenêtre de temps, etc.

Problème : Déterminer pour chaque véhicule leur trajet de manière à minimiser les coûts (temps, essence, etc.)

Application : logistique du dernier kilomètre, etc.

# Job Scheduling Problem



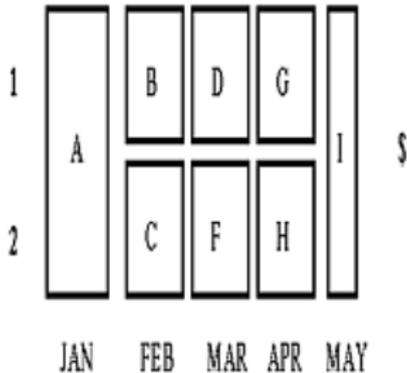
Ensemble de tâches

$$J = \{j_1, j_2, j_3, \dots, j_p\}$$

temps d'exécution  $p(j_i)$

Réalisés sur  $m$  machines

$$M = \{M_1, \dots, M_m\}$$



Applications : ordonnancement, emploi du temps,...

# Optimisation du pilotage d'un Réacteur à Eau Pressurisée dans le cadre de la transition énergétique à l'aide d'algorithmes évolutionnaires

Thèse de Mathieu Muniglia (CEA) - dont ces slides sont issus avec J.-C. Le Pallec, J.-M. Do, H. Gard, S. David.

## Contexte

- Forte augmentation de la part des énergies intermittentes : éolien, solaire - 5% en 2013, 30% selon l'ademe en 2030.
- Les variations peuvent être compensées par :  
une gestion du réseau, le stockage ou les autres sources, *i.e.* le **nucléaire** dans le contexte français (50% en 2030).

## Objectif

Adapter les centrales nucléaires à cette nouvelle configuration, afin qu'elles puissent compenser au mieux les variations

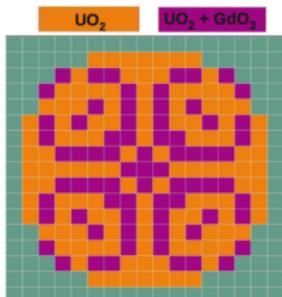
# Méthodologie

## Méthodologie

- **Modéliser** un réacteur nucléaire :  
modélisation multiphysique (neutronique,  
thermodynamique, thermomécanique)  
multi-échelle (échelle du coeur au système complet)
- **Simuler** le modèle par un calcul :  
Définir le schéma de calcul,  
développer les outils informatiques
- **Optimiser** certains paramètres de contrôle  
afin de permettre la manoeuvrabilité du réacteur :  
Algorithme évolutionnaire

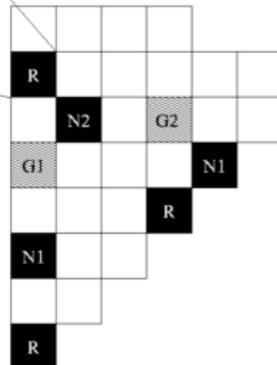
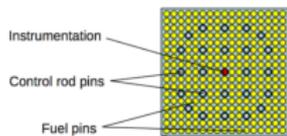
# Modèle du réacteur (REP 1300MV)

Source : Mathieu Muniglia



Representation of a reactor core

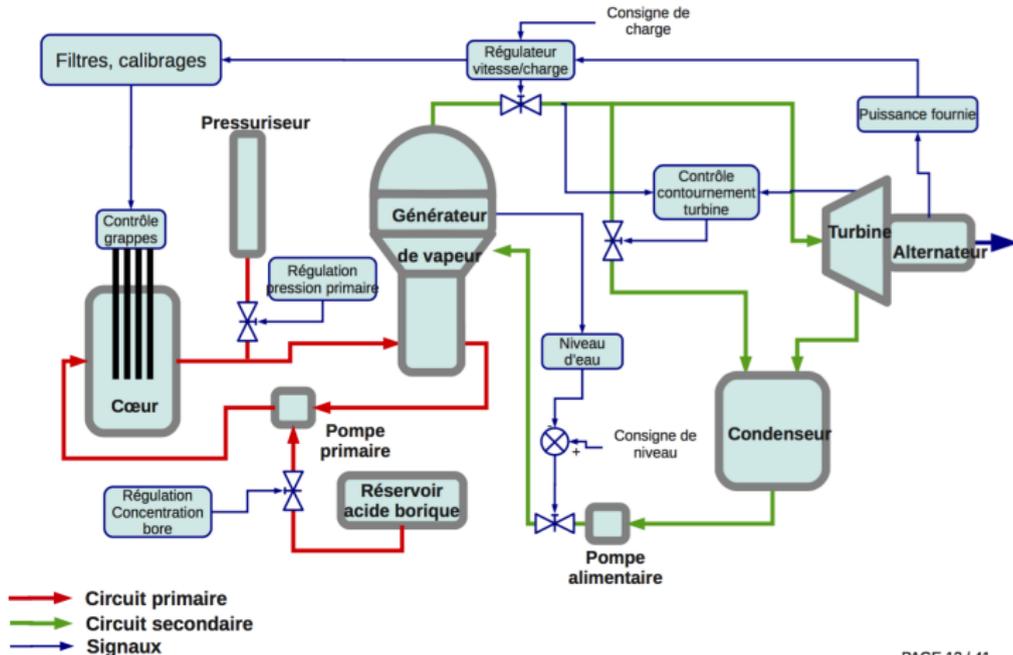
- **PWR 1300** (Electrical power : 1300MW, Thermal power : 3800MW)
- **193 assemblies** (120  $UO_2$ , 73  $UO_2+GdO_3$ )
- **Dimensions** : diameter = 3m, height = 4,5m



- Chaque grappe de contrôle est constituée de **24 crayons** qui s'insèrent dans des tubes guides dans certains assemblages
- **Régulation de température (R)** : 9 grappes "noires" (B4C en haut, AIC en bas)
- **Compensation de puissance** :
  - 4 grappes "grises" G1 (AIC et acier inox)
  - 8 grappes "grises" G2
  - 8 grappes "noires" N1
  - 8 grappes "noires" N2

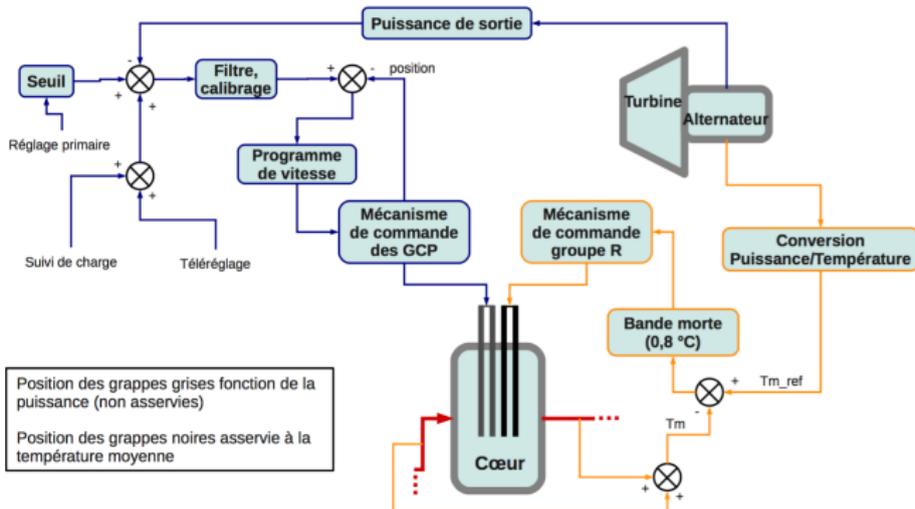
# Schéma simplifié d'une centrale

Source : Mathieu Muniglia



# Chaine de régulation des barres de commande

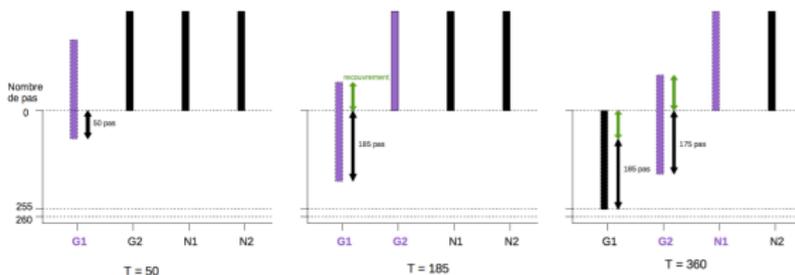
Source : Mathieu Muniglia



Modèles et couplage : "best estimate" puis dégradé pour réduire temps de calcul

Cœur		
Neutronique	Thermohydraulique	Combustible
Géométrie : 3D, 2D, 1D ; quar/huitième, nb de ss-assemblages Solveur 3D : SN, SPN, diffusion Nombre de groupes neutronique : 2, 8	Géométrie : 3D, multi1D Type : stationnaire, transitoire Code de calcul : Apollo, Cathare Conditions limites : $T_w=f(P)$ (connue)	Calcul : thermo-mécanique, thermique Type : stationnaire, transitoire
Système		
Thermohydraulique		Composants
Géométrie : 3D, 1D Fluide : monophasique, diphasique		Injection de bore : modélisation opérateur, calcul de bore critique Couplage cœur : couplage GV simplifié puis introduction des composants du secondaire : condenseur, GCT (modèle best-estimate/adapté)

# Paramètres de la position des barres de contrôle



## Paramètres (11 variables discrètes)

- Recouvrement : nombre de pas entre 2 insertions de barre
- Programme de vitesse : vitesse nominale (pas/min), bande morte, bande de manœuvre groupe R

## Critères à optimiser

- Hétérogénéité du coeur relatif à l'axial offset
- Critère de sureté relatif à la gaine

# Quelques considérations sur ce travail

## Interaction multi-disciplinaire

- Définir un modèle et une simulation est difficile :  
Connaissances expertes nécessaires
- Logiquement l'optimisation commence lorsque  $(\mathcal{X}, f)$  :  
Mais participation à la modélisation nécessaire :
  - comprendre le problème,
  - conseil dans la modélisation (variable, critères, etc.),
  - expliquer ce que l'on attendre comme résultat,
  - regard critique sur les méthodes, etc.
- Résultats dans les deux domaines (physique nucléaire et optimisation) :  
Publications dans les deux domaines

# Quelques considérations sur ce travail

## Intérêt du point de vue optimisation stochastique

- Problème d'optimisation combinatoire black-box multiobjectif
- Temps de calcul d'une simulation long et hétérogène :  
20 min par simu en moyenne  
de 15 min à 35 min
- Développer de nouveaux algorithmes distribués :  
Prise en considération des temps hétérogènes
- Aucune connaissance sur ce problème (black-box) :  
Technique pour régler les paramètres des algorithmes

# Paysages NK

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(x_i; x_{i_1}, \dots, x_{i_K})$$

- $N$  nombre d'acides animés
- $K \leq N - 1$  nombres d'interaction entre ac. animés
- deux types d'ac. animé 0 ou 1
- $x_k$  le  $k^{eme}$  ac. animé d'une chaîne  $x$
- $\{i_1, \dots, i_K\} \subset \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, N\}$
- $f_i : \{0, 1\}^{K+1} \rightarrow [0, 1]$

Application : modélisation de protéines

exemple  $N = 4$   $K = 2$ 

$$x = 0110$$

$x_1 x_2 x_4$	$f_1$
000	0.9
001	0.6
010	0.1
011	0.2
...	...

$x_1 x_2 x_3$	$f_2$
000	0.4
001	0.8
010	0.3
011	0.2
...	...

$x_2 x_3 x_4$	$f_3$
000	0.2
...	...
101	0.9
110	0.1
111	0.5

$x_1 x_2 x_4$	$f_4$
000	0.1
001	0.2
010	0.8
011	0.0
...	...

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{4} ( f_1(010) + f_2(011) + f_3(110) + f_4(010) ) \\
 &= \frac{1}{4} ( 0.1 + 0.2 + 0.1 + 0.8 ) \\
 &= 0.3
 \end{aligned}$$

# Problème du sac à dos

## Exercice

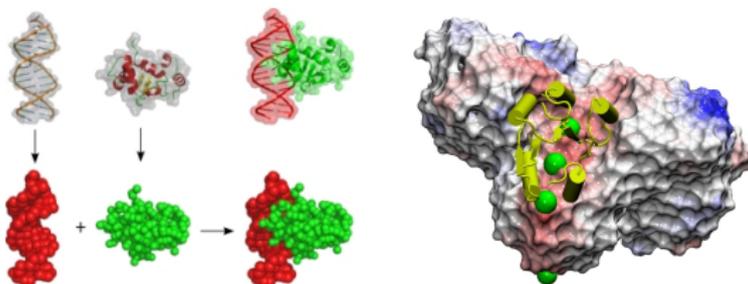
Traduire en un problème d'optimisation le problème qui consiste à remplir un sac à dos avec le plus d'objets de valeur en tenant compte de leur encombrement.

# Exemples de problème d'optimisation numérique

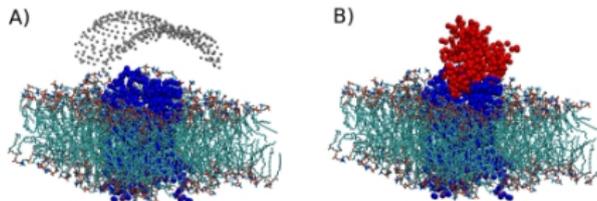
La suite est une liste de problèmes d'optimisation numérique

# Docking moléculaire

Position relative qui minimise l'énergie électrostatique



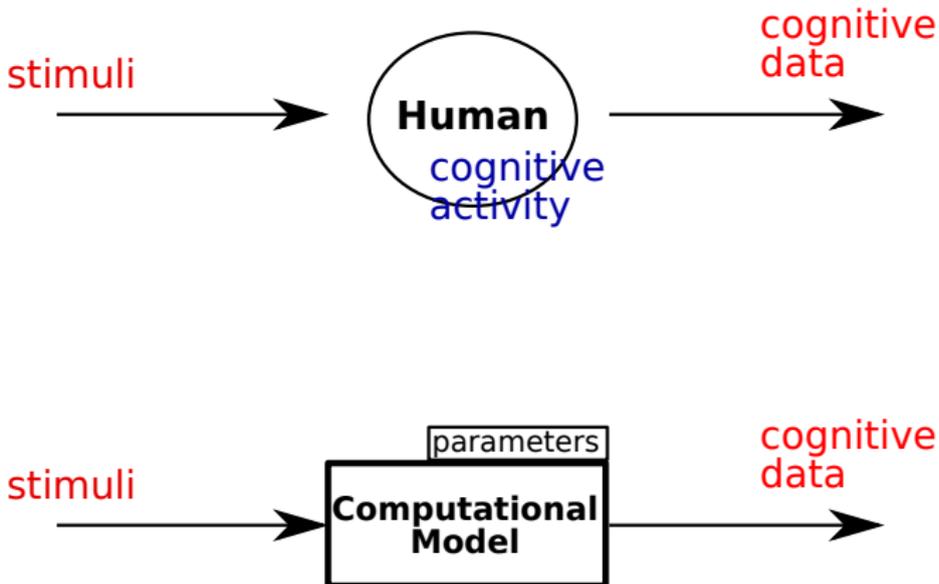
ADN - protéine ou protéine - protéine



(crédits S. Fiorucci, université de Nice Sophia Antipolis)

# Calibration de modèle

## Modèle cognitif computationnel



# Un modèle, à quoi ça sert ?...

## Pourquoi faire un modèle ?

- Valeur explicative :
  - Définition et utilisation d'un vocabulaire formel pour décrire le comportement cognitif
  - Approche théorique : apport de nouvelles connaissances scientifiques
- Valeur prédictive :
  - Utilisation de la simulation d'un modèle pour prédire le comportement d'un humain
  - Approche pratique : par exemple en ergonomie

# Charge cognitive

## Definition

Cognitive Load (or mental workload) is the property emerging from the interaction between the requirements of the task, their circumstances and the skills, behaviors, and perceptions of the user.

- Working Memory (Sweller, 1988) :  
Problem solving, reasoning, language
- Attentional capacity :  
Divided vs selective attention (Dual-Task Paradigm)
  - Filter Theory of selective attention (Broadbent, 1958)
  - Single channel theory (Welford, 1967, 1980)
  - Resource Theory (Kahneman, 1973 ; Wickens, 1984)
- Serial vs Parallel allocation of attention during Dual-Task ?

# Estimation de la charge cognitive

Le déluge de donnée est là !

Methods :

- Self-report measures (subjective) : uni or multi-dimensional scales (SWAT, NASA-TLX,...).
- Physiological measures :
  - EEGs, Heart rate, Electrodermal activity, pupil diameter,...

# Tâche de mémorisation de symboles

## Description simple de la tâche

- Une suite de chiffres est énoncée à un sujet
- Le sujet doit restituer cette suite

Quels sont les modalités/systèmes cognitifs mis en jeu ?

# Tâche de mémorisation de symboles

## Description simple de la tâche

- Une suite de chiffres est énoncée à un sujet
- Le sujet doit restituer cette suite

Quels sont les modalités/systèmes cognitifs mis en jeu ?

- Mémoire de travail
- Canal auditif

# Un petit test

## Protocole

- $A$  écrit  $n$  chiffres
- $A$  dicte à  $B$  ces  $n$  chiffres
- $B$  restitue ensuite ces  $n$  chiffres
- Pendant ce temps  $C$  "prend" le pouls

Résultats : Réussite ou echec ? Tester avec  $n = 5$  et/ou  $n = 9$ .

# Un petit test

## Protocole

- $A$  écrit  $n$  chiffres
- $A$  dicte à  $B$  ces  $n$  chiffres
- $B$  restitue ensuite ces  $n$  chiffres
- Pendant ce temps  $C$  "prend" le pouls

Résultats : Réussite ou echec ? Tester avec  $n = 5$  et/ou  $n = 9$ .

$$7 +/_- 2$$

# Estimation de la charge cognitive

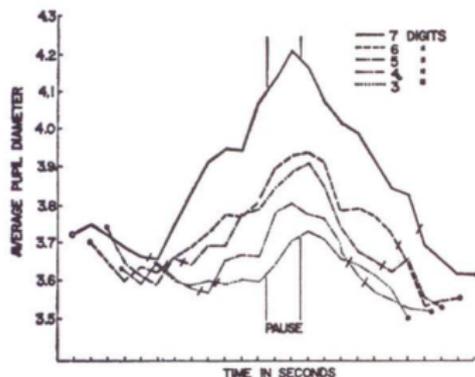
## Methods :

- Self-report measures (subjective) : uni or multi-dimensional scales (SWAT, NASA-TLX,...).
- Physiological measures :
  - EEGs, Heart rate, Electrodermal activity, **pupil diameter**,...

# Pupil Diameter (Task-evoked Pupillary Responses)

## Digit span task

- Encoding : increases
  - Recall : decreases
- 
- Pupillary response correlates positively with increases in mental processing effort, or workload (Bucks and Walrath, 1992 ; Beatty, 1982 ; Granholm et al., 1996 ; Just et al., 2003).



Kahneman and Beatty (1966)

# Task-evoked Pupillary Responses (TEPR)

Number studies have shown significant relations between pupillary responses and cognitive processes

- Short-Term Memory (Kahneman and Beatty, 1966 ; Van Der Meer et al, 2005)
- Language (Just and Carpenter, 1992)
- Reasoning (Nuthmann and Van Der Meer, 2005)
- Memory (Karatekin, Couperus, and Marcus, 2004 ; Van Der Meer, Friedrich, Nuthmann, Stelezi, and Kuchinke, 2005)
- Perception (Verney, Granholm, and Dionisio, 2001 ; Schlemmer et al, 2005)
- ...

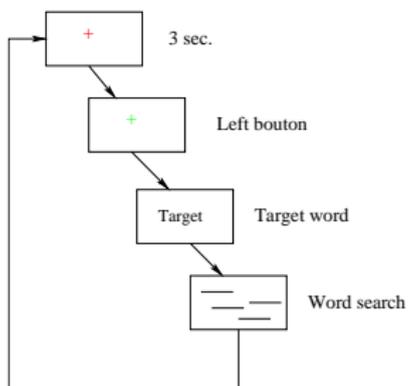
and information seeking?

# Etude et méthodologie

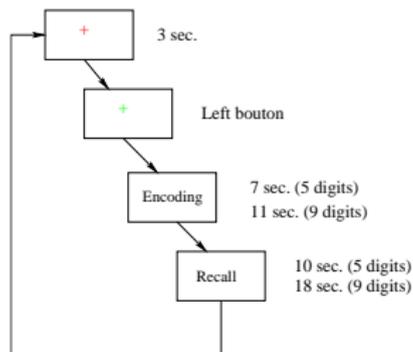
## Goal : Testing attentional load with dual-task paradigm

- 2 single tasks and 1 dual task
- **Vision** : Word-Search (WS)  
Target-word on a set of 12 words randomly displayed (same length)
  - Lexical Frequency (low vs high)
  - Fitts'index (low vs high)
- **Audition** : Digit-Span (DS)  
Digit from 0 to  $n$ 
  - Digits' sequence (5 digits vs 9 digits)
  - Phase (encoding vs recall)
- **Vision + Audition** : Mixing WS and DS
  - All previous factors

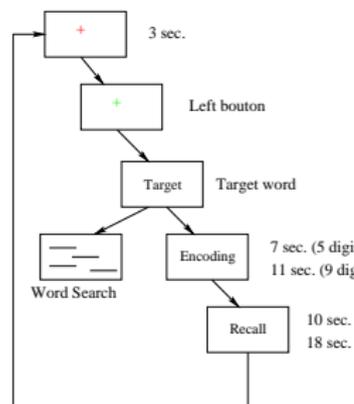
# Méthodologie



Word Search task



Digit Span task

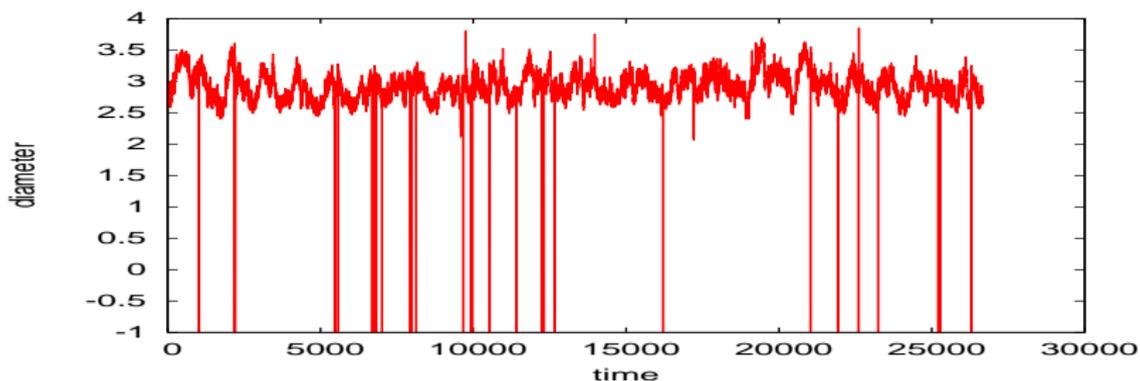
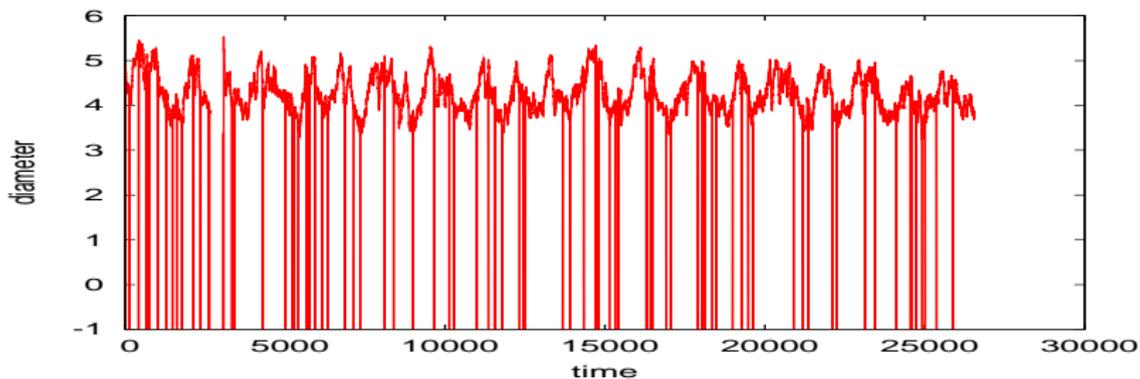


Dual task

# Résultats

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	
1	Subject	Session	ID	RTTime	CursorX	CursorY	Timestamp	DiameterPupil	DistanceLeftEye	Validity	DiameterPupil	DistanceRightEye	Validity	Repeat	TpsSeq	Etape	±
2	1	21	5199	284604	585	397	4004659.505	-1	-1	4.5075394	684.5776	0	1	11000	CroixRouge	0.	
3	1	21	5200	284623	598	399	4004678.628	4.862908	683.7488	0.5019675	684.5776	0	1	11000	CroixRouge	-0.	
4	1	21	5201	284643	605	396	4004698.623	4.913707	683.7488	0.5078091	684.5776	0	1	11000	CroixRouge	0.	
5	1	21	5202	284663	599	392	4064718.499	4.884111	683.7488	0.5099319	684.5776	0	1	11000	CroixRouge	0.	
6	1	21	5203	284676	601	381	4064738.495	4.89161	683.2912	0.5087602	686.0275	0	1	11000	CroixRouge	-0.	
7	1	21	5204	284703	601	394	4064758.373	4.912834	683.2912	0.5026255	686.0275	0	1	11000	CroixRouge	-0.	
8	1	21	5205	284722	607	394	4064778.366	4.830601	683.2912	0.505141	686.0275	0	1	11000	CroixRouge	0.	
9	1	21	5206	284742	514	394	4064798.243	4.865799	683.2912	0.507658	686.0275	0	1	11000	CroixRouge	0.	
10	1	21	5207	284762	497	381	4064818.238	4.829736	683.2912	0.4995622	686.0275	0	1	11000	CroixRouge	-0.	
11	1	21	5208	284775	480	381	4064838.116	4.842025	683.4144	0.5016651	686.6942	0	1	11000	CroixRouge	0.	
12	1	21	5209	284803	491	381	4064858.112	4.796798	683.4144	0.4926803	686.6942	0	1	11000	CroixRouge	-0.	

# Résultats : succession des essais pour un même sujet



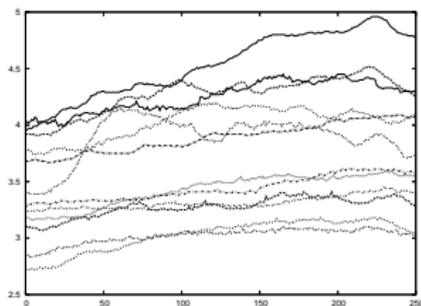
# Pré-traitement

## Phase indispensable avant toute modélisation

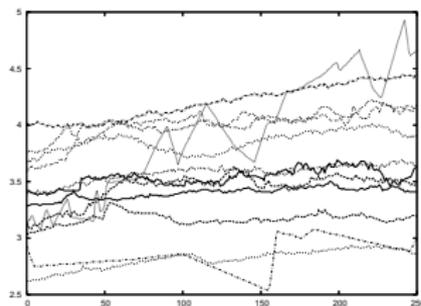
- How to build TEPRs :  
No consensus in the litterature
  - TEPRs consist in aggregating pupil diameter over a period of fixed time.
- Our construction method :  
TEPRs on a variable period of time (Normalized TEPRs)
  - 1 Filtering out saccades and blink related artifacts.
  - 2 Smoothing the data with a low-pass filter
  - 3 Resampling the data with a fixed number of points (250 pts)

# Diamètres pupillaires pour les 24 sujets : encodage

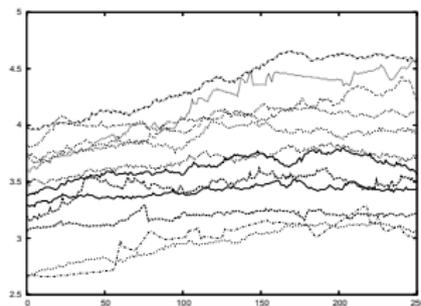
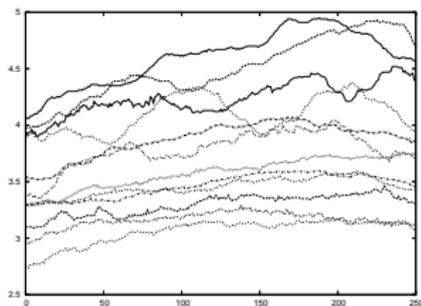
## 12 premiers sujets



## 12 derniers sujets



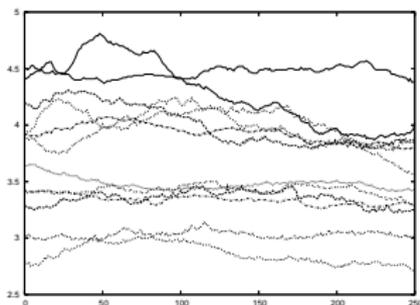
## 5 nombres à mémoriser



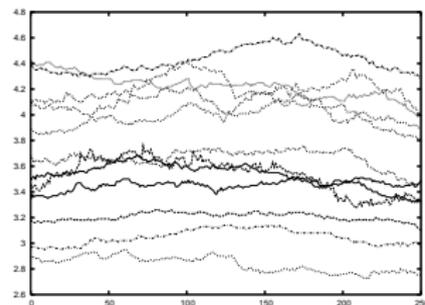
## 9 nombres à mémoriser

# Diamètres pupillaires pour les 24 sujets : Rappel

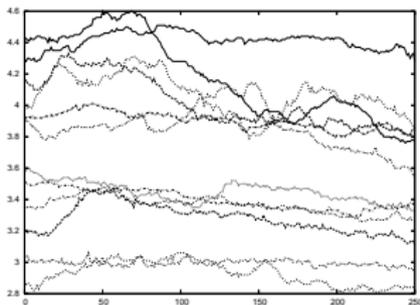
## 12 premiers sujets



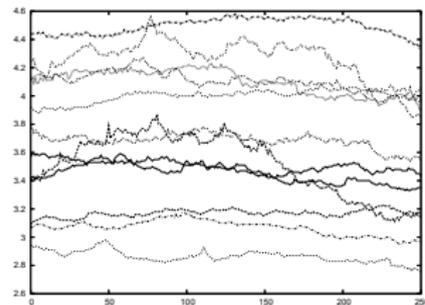
## 12 derniers sujets



## 5 nombres à mémoriser



## 9 nombres à mémoriser



# Modélisation

## Questions

- Nature de la modélisation :
  - Qu'est-ce qu'un modèle dans notre cas ?
  - Comment définir un comportement moyen ?
- Exploitation de la modélisation :
  - Est-ce que la pupille est un marqueur de la charge cognitive pour ces tâches ?
  - Est-ce que les tâches sont traitées en parallèle ou en série ?

# Modélisation

## Questions

- Nature de la modélisation :
  - Qu'est-ce qu'un modèle dans notre cas ?

# Modélisation

## Questions

- Nature de la modélisation :
  - Qu'est-ce qu'un modèle dans notre cas ?  
*Fonction  $f_\theta$  dépendant de paramètres  $\theta$  du diamètre pupillaire en fonction de l'unité de temps pour chacune des situations*
  - Comment définir un comportement moyen ?

# Modélisation

## Questions

- Nature de la modélisation :
  - Qu'est-ce qu'un modèle dans notre cas ?  
*Fonction  $f_\theta$  dépendant de paramètres  $\theta$  du diamètre pupillaire en fonction de l'unité de temps pour chacune des situations*
  - Comment définir un comportement moyen ?  
*Voir plus loin*
- Exploitation de la modélisation :
  - Est-ce que la pupille est un marqueur de la charge cognitive pour ces tâches ?

# Modélisation

## Questions

- Nature de la modélisation :
  - Qu'est-ce qu'un modèle dans notre cas ?  
*Fonction  $f_\theta$  dépendant de paramètres  $\theta$  du diamètre pupillaire en fonction de l'unité de temps pour chacune des situations*
  - Comment définir un comportement moyen ?  
*Voir plus loin*
- Exploitation de la modélisation :
  - Est-ce que la pupille est un marqueur de la charge cognitive pour ces tâches ?  
*Variation non standart (lumière, etc.) du diamètre de la pupille*
  - Est-ce que les tâches sont traitées en parallèle ou en série ?

# Modélisation

## Questions

- Nature de la modélisation :
  - Qu'est-ce qu'un modèle dans notre cas ?  
*Fonction  $f_\theta$  dépendant de paramètres  $\theta$  du diamètre pupillaire en fonction de l'unité de temps pour chacune des situations*
  - Comment définir un comportement moyen ?  
*Voir plus loin*
- Exploitation de la modélisation :
  - Est-ce que la pupille est un marqueur de la charge cognitive pour ces tâches ?  
*Variation non standard (lumière, etc.) du diamètre de la pupille*
  - Est-ce que les tâches sont traitées en parallèle ou en série ?  
*Relation entre les modèles pour chaque situation*

# modèle de comportement moyen ?

Moyenne des formes vs. Forme de la moyenne

# modèle de comportement moyen ?

## Moyenne des formes vs. Forme de la moyenne

- Forme de la moyenne :
  - Calculer la moyenne des courbes expérimentales :  
 $\{data_i\} \Rightarrow \overline{data}$
  - Calculer la fonction décrivant la courbe moyenne :  $\overline{data} \Rightarrow f_\theta$

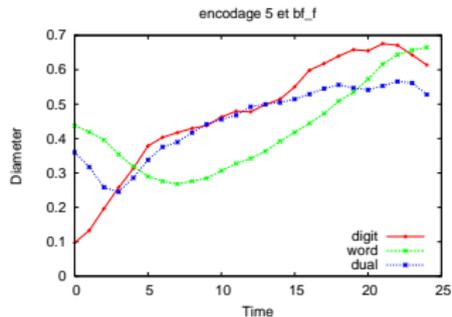
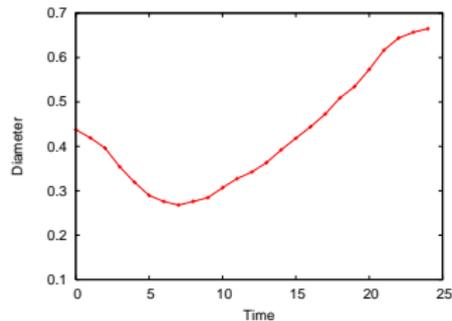
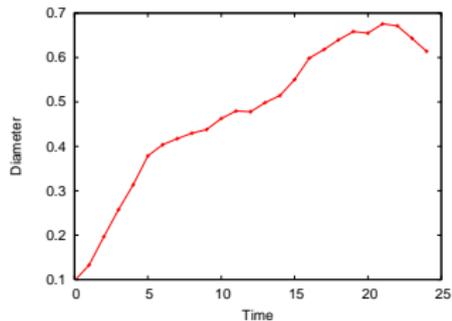
# modèle de comportement moyen ?

## Moyenne des formes vs. Forme de la moyenne

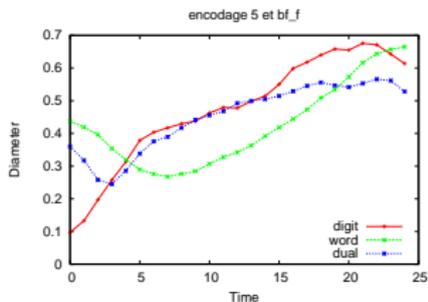
- Forme de la moyenne :
  - Calculer la moyenne des courbes expérimentales :  
 $\{data_i\} \Rightarrow \overline{data}$
  - Calculer la fonction décrivant la courbe moyenne :  $\overline{data} \Rightarrow f_{\theta}$
- Moyenne des formes :
  - Calculer les fonctions décrivant chaque courbe expérimentale :  
 $\{data_i\} \Rightarrow \{f_{\theta_i}\}$
  - Calculer le modèle moyen par la moyenne des paramètres :  
 $\{f_{\theta_i}\} \Rightarrow f_{\bar{\theta}}$

# Average of the normalized encoding curves

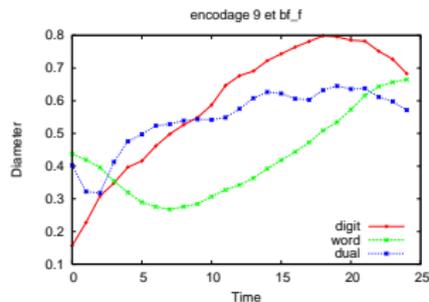
5 digits, low frequency lex., easy fits



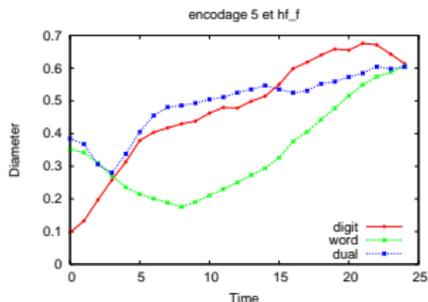
# Average of the normalized encoding curves



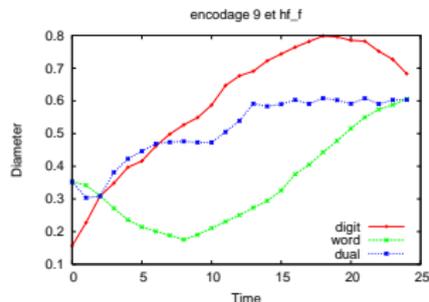
5 d., low, easy



9 d., low, easy



5 d., high, easy



9 d., high, easy

# Principe général de la modélisation

Une idée de modélisation ?

# Principe général de la modélisation

Une idée de modélisation ?

But : déduire des tâches simples la tâche duale

- $f_{WS}$ ,  $f_{DS}$  : fonctions construites à partir de l'interpolation linéaire des données expérimentales pour chacune des tâches simples
- $F$  est définie à partir de  $f_{WS}$  et  $f_{DS}$

# Première tentative

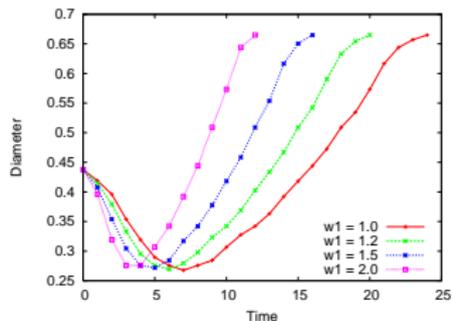
## Intuition/Hypothèse

- courbe *Dual* : combinaison linéaire des courbes *WS* et *DS*,
- Les minima des courbes *WS* et *Dual* se ressemblent :  
la concavité autour du minimum de la courbe de *Dual* semble être une homothétie de celui de *WS*

# Première tentative

## Intuition/Hypothèse

- courbe *Dual* : combinaison linéaire des courbes *WS* et *DS*,
- Les minima des courbes *WS* et *Dual* se ressemblent : la concavité autour du minimum de la courbe de *Dual* semble être une homothétie de celui de *WS*



$$f_{WS}(\omega t)$$

# Première tentative

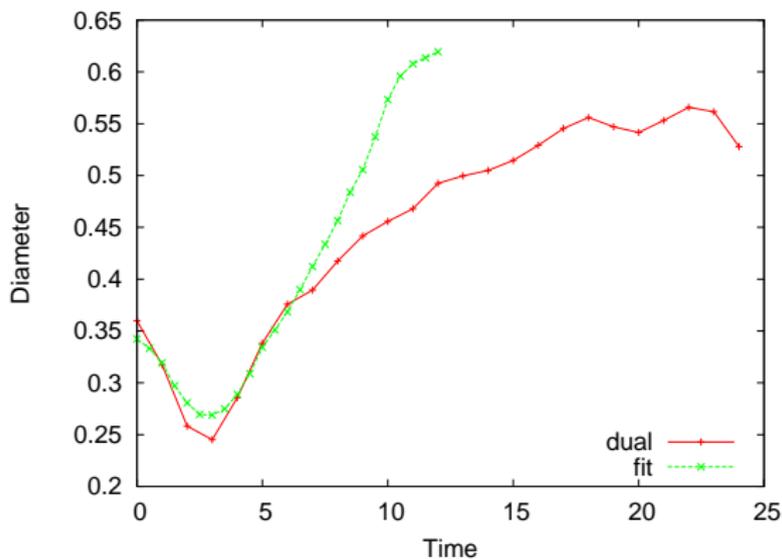
## Intuition/Hypothèse

- courbe *Dual* : combinaison linéaire des courbes *WS* et *DS*,
- Les minima des courbes *WS* et *Dual* se ressemblent : la concavité autour du minimum de la courbe de *Dual* semble être une homothétie de celui de *WS*

$$F(t) = \alpha f_{DM}(t) + (1 - \alpha) f_{WS}(\omega t)$$

# Première tentative : résultats

Ajustement "à la main" des 2 paramètres  $\alpha$  et  $\omega$ .



$\alpha = 0.28$  et  $\omega = 2.1$

## Première tentative : résultats

Observations :

- Bonne correspondance des concavités autour des minima (mais ce n'est qu'intuitif)
- Problème d'échelle pour obtenir la durée totale !
- Courbe Duale serait plus proche de la courbe DS par la suite.

## Deuxième tentative

### Intuition/Hypothèse

- courbe *Dual* : combinaison linéaire des courbes *WS* et *DS*,
- Les minima des courbes *WS* et *Dual* se ressemblent :  
la concavité autour du minimum de la courbe de *Dual* semble être une homothétie de celui de *WS*
- 2 périodes : avant  $T$ , accélération de la tache *WS* et après  $T$ , ralentir *WS*

## Deuxième tentative

### Intuition/Hypothèse

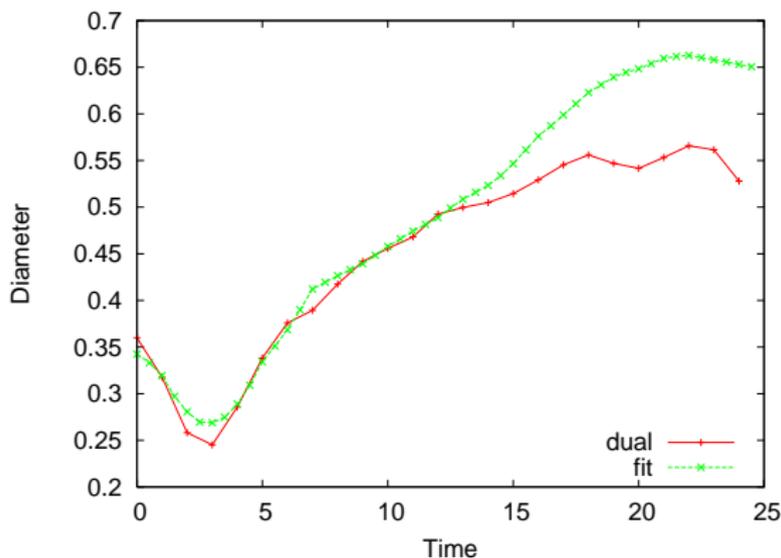
- courbe *Dual* : combinaison linéaire des courbes *WS* et *DS*,
- Les minima des courbes *WS* et *Dual* se ressemblent :  
la concavité autour du minimum de la courbe de *Dual* semble être une homothétie de celui de *WS*
- 2 périodes : avant  $T$ , accélération de la tache *WS* et après  $T$ , ralentir *WS*

$$F(t) = \begin{cases} \alpha_1 f_{DM}(t) + (1 - \alpha_1) f_{WS}(\omega_1 t) & \text{if } \forall t < T \\ \alpha_2 f_{DM}(t) + (1 - \alpha_2) f_{WS}(\omega_1 T + \omega_2(t - T)), & \text{if } \forall t \geq T \end{cases}$$

$$\omega_2 = \frac{T_{max} - \omega_1 T}{T_{max} - T}$$

## Deuxième tentative : résultats

Ajustement "à la main" des 4 paramètres  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\omega_1$  et  $T$ .



$\alpha_1 = 0.28$ ,  $\alpha_2 = 0.28$ ,  $\omega_1 = 2.1$  et  $T = 7$ .

## Deuxième tentative : résultats

Observations :

- Bonne correspondance des concavités autour des minima (mais ce n'est qu'intuitif)
- Pas satisfaisant en fin de tache
- Courbes  $WS$  et  $DS$  ont toutes deux des diamètres pupillaires supérieures à la tache duale.

## Troisième tentative

### Intuition/Hypothèse

- (...)
- 2 périodes : avant  $T$  accélération de la tâche  $WS$ , après  $T$  ralentir  $WS$
- pas de normalisation de la pondération

# Troisième tentative

## Intuition/Hypothèse

- (...)
- 2 périodes : avant  $T$  accélération de la tâche  $WS$ , après  $T$  ralentir  $WS$
- pas de normalisation de la pondération

$$F(t) = \begin{cases} K_1(\alpha_1 f_{DM}(t) + (1 - \alpha_1) f_{WS}(\omega_1 t)) & \text{if } \forall t < T \\ K_2(\alpha_2 f_{DM}(t) + (1 - \alpha_2) f_{WS}(\omega_1 T + \omega_2(t - T))), & \text{if } \forall t \geq T \end{cases}$$

$$\omega_2 = \frac{T_{max} - \omega_1 T}{T_{max} - T}$$

# Recherche des paramètres de la modélisation

6 paramètres à ajuster...

# Recherche des paramètres de la modélisation

6 paramètres à ajuster...

## Principe

Passage d'un problème de calibration de modèle  
à un problème d'optimisation.

# Recherche des paramètres de la modélisation

6 paramètres à ajuster...

## Principe

Passage d'un problème de calibration de modèle à un problème d'optimisation.

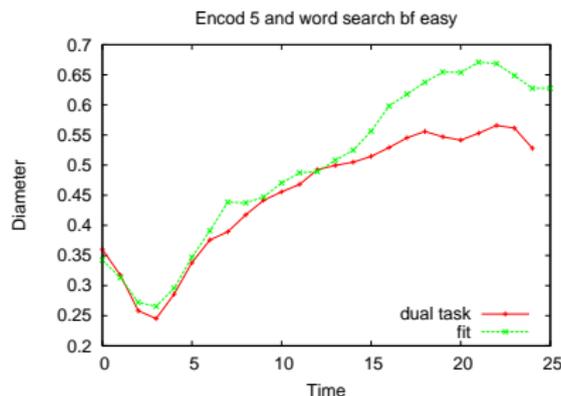
Minimiser la distance entre les données expérimentales et la réponse du modèle :

$$D(F, f_{dual}) = \sum_{t=0}^{T_{max}} (F(t) - f_{dual}(t))^2 \quad (1)$$

Méthode standart

- Méthode least squares : descente de gradient

# Troisième tentative : résultats



$$\alpha_1^{DM} = 0.26949 + / - 3.57272$$

$$\alpha_1^{WS} = 0.71589 + / - 2.48088$$

$$\omega_1 = 2.18175 + / - 7.31864$$

$$\alpha_2^{DM} = 0.75530 + / - 4.03088$$

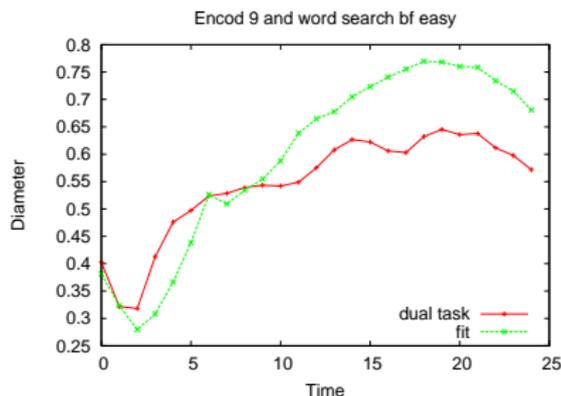
$$\alpha_2^{WS} = 0.26424 + / - 7.38936$$

le nombre de degré de liberté est : dof = 20

Le chi2 est de : chisq = 0.0209632

et donc chisq/dof = 0.00104816

# Troisième tentative : premiers résultats



$$\alpha_1^{DM} = 0.54886 + / - 3.52852$$

$$\alpha_1^{WS} = 0.64250 + / - 3.11468$$

$$\omega_1 = 2.91984 + / - 4.88156$$

$$\alpha_2^{DM} = 0.58580 + / - 1.68662$$

$$\alpha_2^{WS} = 0.62422 + / - 4.07546$$

le nombre de degré de liberté est : dof = 20

Le chi2 est de : chisq = 0.0121965

et donc chisq/dof = 0.000609824

## Troisième tentative : premiers résultats

- Résultats "semblent" visuellement tout juste acceptable pour ces courbes
- les  $\alpha$ s ont à peu près le même ordre de grandeur

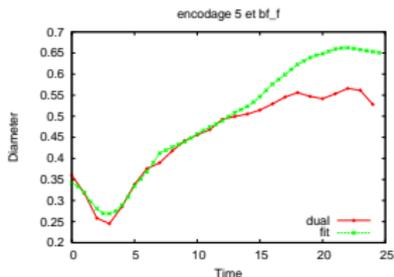
## Troisième tentative : premiers résultats

- Résultats "semblent" visuellement tout juste acceptable pour ces courbes
- les  $\alpha$ s ont à peu près le même ordre de grandeur

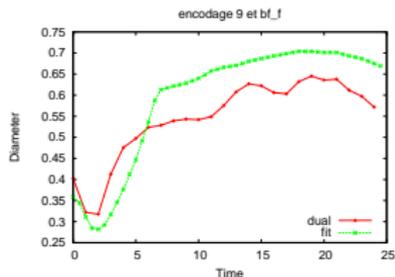
### Mais dans la méthode d'optimisation

- algorithme least squares : grande variation de résultats selon les exécutions
- l'algo. s'arrête avant d'avoir convergé et trouvé de bonnes valeurs : **minima locaux**

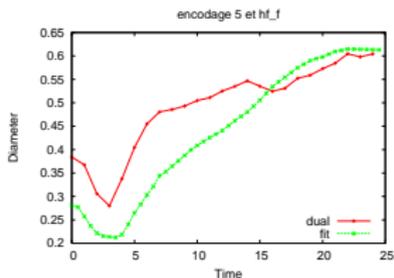
# Troisième tentative : premiers résultats



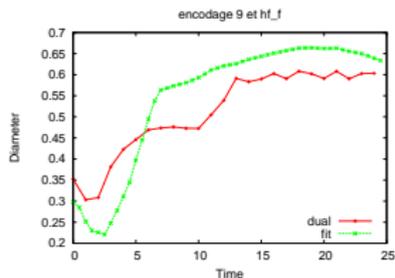
5 d., low, easy



9 d., low, easy



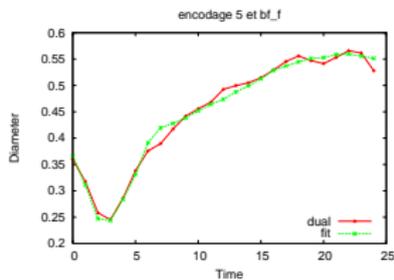
5 d., high, easy



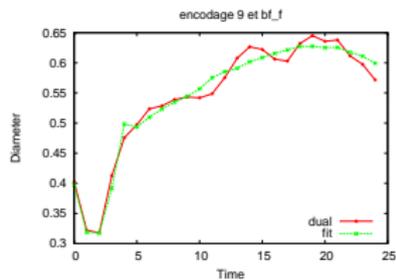
9 d., high, easy

→ Utiliser une meilleure méthode d'optimisation !

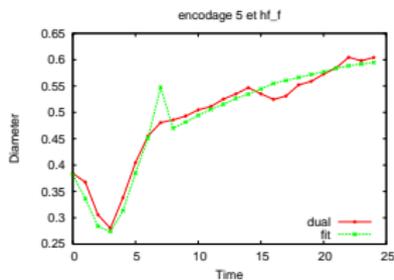
# Troisième tentative : résultats !



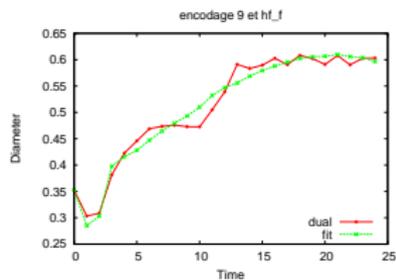
5 d., low, easy



9 d., low, easy



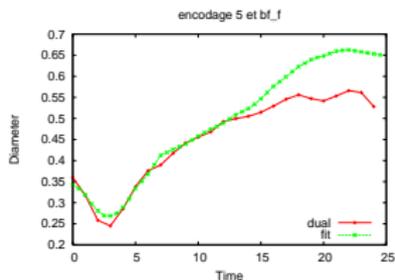
5 d., high, easy



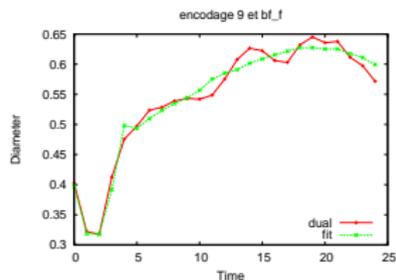
9 d., high, easy

# Troisième tentative : résultats !

5 d., low, easy

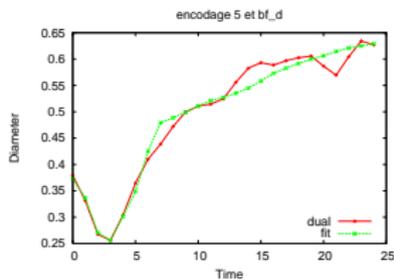


Moindres carrés

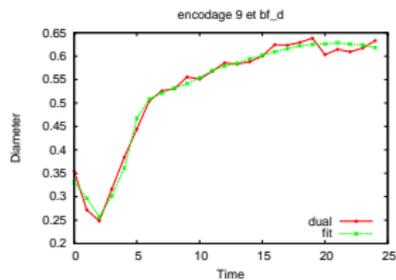


CMA-ES

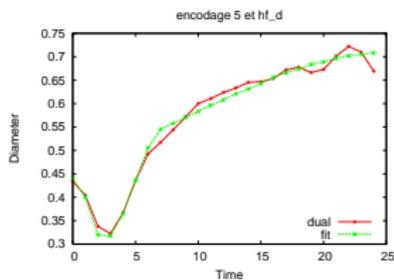
# Troisième tentative : résultats !



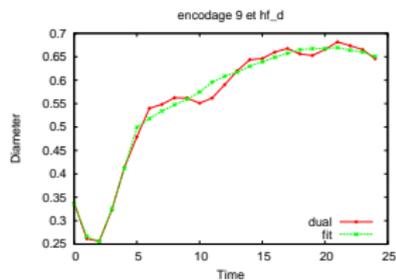
5 d., low, hard



9 d., low, hard



5 d., high, hard



9 d., high, hard

# Value of the parameters and least squares D.

DM	WS	$D$	$K_1$	$\alpha_1$	$\omega_1$	$K_2$	$\alpha_2$	$T$
5	lf e	0.0031	0.887	0.073	2.67	0.840	0.244	6
		0.0032 <sub>0.0001</sub>	0.884 <sub>0.011</sub>	0.071 <sub>0.025</sub>	2.67 <sub>0.083</sub>	0.841 <sub>0.001</sub>	0.295 <sub>0.042</sub>	6.1 <sub>0.30</sub>
5	hf e	0.0105	1.341	0.266	2.43	0.963	0.083	7
		0.0111 <sub>0.0003</sub>	1.316 <sub>0.017</sub>	0.208 <sub>0.038</sub>	2.69 <sub>0.191</sub>	0.962 <sub>0.004</sub>	0.090 <sub>0.035</sub>	6.2 <sub>0.60</sub>
5	lf h	0.0089	1.028	0.093	2.68	0.929	0.092	6
		0.0091 <sub>0.0001</sub>	1.021 <sub>0.004</sub>	0.083 <sub>0.007</sub>	2.70 <sub>0.013</sub>	0.929 <sub>0.001</sub>	0.133 <sub>0.023</sub>	6.0 <sub>0.00</sub>
5	hf h	0.0053	1.144	0.078	2.72	1.061	0.089	6
		0.0055 <sub>0.0001</sub>	1.136 <sub>0.012</sub>	0.066 <sub>0.022</sub>	2.73 <sub>0.072</sub>	1.061 <sub>0.000</sub>	0.170 <sub>0.040</sub>	6.1 <sub>0.30</sub>
9	lf e	0.0054	1.103	0.274	4.25	0.888	0.325	4
		0.0061 <sub>0.0011</sub>	1.107 <sub>0.015</sub>	0.293 <sub>0.037</sub>	4.14 <sub>0.253</sub>	0.886 <sub>0.003</sub>	0.348 <sub>0.014</sub>	4.2 <sub>0.40</sub>
9	hf e	0.0066	1.271	0.382	4.62	0.939	0.264	3
		0.0074 <sub>0.0003</sub>	1.275 <sub>0.002</sub>	0.415 <sub>0.011</sub>	3.82 <sub>0.268</sub>	0.939 <sub>0.006</sub>	0.273 <sub>0.025</sub>	3.9 <sub>0.30</sub>
9	lf h	0.0046	0.994	0.242	3.53	0.901	0.223	5
		0.0047 <sub>0.0001</sub>	0.992 <sub>0.003</sub>	0.245 <sub>0.009</sub>	3.54 <sub>0.015</sub>	0.899 <sub>0.002</sub>	0.236 <sub>0.009</sub>	5.0 <sub>0.00</sub>
9	hf h	0.0045	0.891	0.130	4.33	0.962	0.290	4
		0.0046 <sub>0.0001</sub>	0.909 <sub>0.016</sub>	0.176 <sub>0.041</sub>	4.15 <sub>0.154</sub>	0.962 <sub>0.003</sub>	0.283 <sub>0.023</sub>	4.6 <sub>0.49</sub>

# Commentaires sur les résultats

- Word search is faster for 9 digits than for 5 digits.
  - 5 digits :  $T \approx 6$  and  $2.5 \leq \omega_1 \leq 3.0$
  - 9 digits :  $T \approx 4$  and  $3.5 \leq \omega_1 \leq 4.7$ .
- Word search task has the main influence on the pupil diameter.
  - $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  small and  $\leq 0.39$ .
- Word search task has more influence on 9 digits than for 5 digits
  - $\alpha_1$  or  $\alpha_2$  are respectively higher for 9 digits tasks than for 5 digits tasks.

# Conclusions

## Conclusion de l'étude

- Word search task has the priority on the digit memory task,
- Priority for word search task stronger when the digit memory task is more difficult.

*We can suppose that the people are first concentrated on word search task to save time for the more difficult task after.*

## Conclusion de la méthodologie

- Conception progressive par essai/erreur d'un modèle pertinent
- Travail original de longue haleine

# Optimisation et apprentissage

" Apprendre revient à minimiser une erreur "

" Optimiser revient à apprendre à concevoir la meilleure solution "

Voir exemples au tableau...

# Problème d'optimisation

## Problème d'optimisation

Un **problème d'optimisation** est un couple  $(\mathcal{X}, f)$  avec :

- Espace de recherche : ensemble des solutions possibles,

$$\mathcal{X}$$

- fonction objectif : critère de qualité (ou de non-qualité)

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

## Résoudre un problème d'optimisation

Trouver la (ou les) meilleure solution selon le critère de qualité

$$x^* = \operatorname{argmax}_{\mathcal{X}} f$$

# Problème d'optimisation

## Problème d'optimisation

Un **problème d'optimisation** est un couple  $(\mathcal{X}, f)$  avec :

- Espace de recherche : ensemble des solutions possibles,

$$\mathcal{X}$$

- fonction objectif : critère de qualité (ou de non-qualité)

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

## Résoudre un problème d'optimisation

Trouver la (ou les) meilleure solution selon le critère de qualité

$$x^* = \operatorname{argmax}_{\mathcal{X}} f$$

*Mais, des fois, l'ensemble de toutes les meilleures solution, ou une bonne approximation, ou une solution "robuste", etc.*

# Contexte

## Optimisation boîte noire (Black box)

Nous ne pouvons connaître que  $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots\}$  donnés par un "oracle"

Aucune information sur la définition de la fonction objectif  $f$  n'est soit disponible ou soit nécessaire



- Fonction objectif donnée par un calcul ou une simulation
- Fonction objectif peut être irrégulière, non différentielle, non continue, etc.

# Typologie des problèmes d'optimisation

## Classification

- **Optimisation combinatoire** : Espace de recherche dont les variables sont discrètes (cas NP-difficile)
- **Optimisation numérique (continue)** : Espace de recherche dont les variables sont continues
- **N'entrant pas dans les deux autres catégories** : combinaison discret/continue, programme, morphologie, topologie, etc.