Théorie des jeux
Jeux évolutionnaires

Modelisation des systèmes complexes
Master 2 MISC

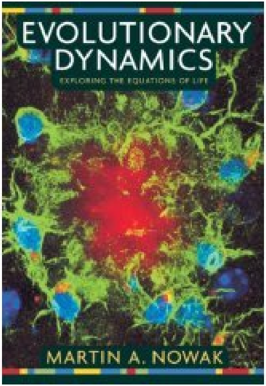
Sébastien Verel
verel@univ-littoral.fr
http://www-lisic.univ-littoral.fr/~verel

Université du Littoral Côte d'Opale
Laboratoire LISIC
Equipe OSMOSE

Evolutionary games

Ce cours est en partie basé sur les travaux et le livre de Martin A. Nowak

- M.A. Nowak, Evolutionary Dynamics ed. The Belknap press of Harvard University press, 2006.



Jeux de l'ultimatum

On offre 100 euros à 2 joueurs
à condition qu'ils se mettent d'accord sur le partage

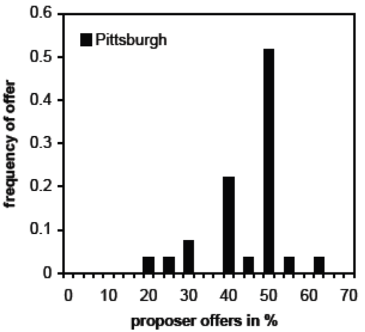
Déroulement :

1. On lance une pièce pour décider qui prend le rôle "offreur" de celui qui propose et qui prend le rôle "receveur" de celui qui reçoit
2. Une offre est faite par l'"offreur"
3. Le "receveur" peut accepter ou refuser :
   - s'il accepte, l'argent est partagé
   - s'il refuse, personne ne reçoit d'argent

Jeux de l'ultimatum : résultat

Résultats

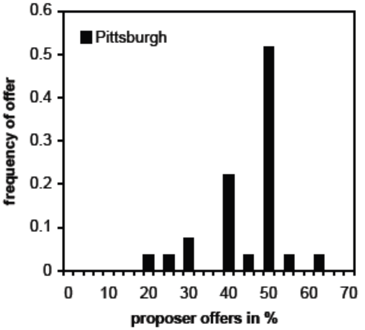
- La majorité (66%) des offres sont entre 40% et 50% et sont acceptées
- Peu d'offres sont inférieures à 20% et la majorité est alors rejetée



Jeux de l'ultimatum : résultat

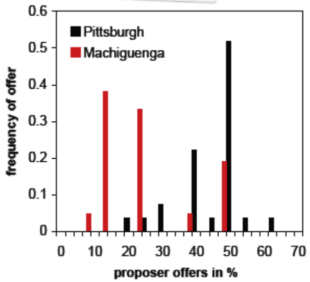
Interprétation

- → Selon l'*hypothèse de rationalité* (optimisation des gains) : la plus petite offre possible et acceptation quelque soit la somme
- → Ici l'hypothèse de rationnalité n'est clairement pas vérifiée !
- → Résultats peu dépendants de la somme, du sexe, de la religion ou du pays...

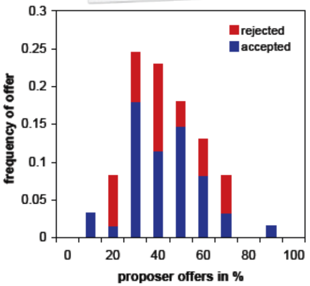


Jeux de l'ultimatum : Cas extrêmes

Machiguenga (Pérou) vs Au and Gnau (Papouasi nouvelle Guinée)



- Offers are significantly lower.
- A single offer was rejected.



- Hyper-fair offers are frequent.
- Frequent rejections.

Jeux de l'ultimatum : Quelques conclusions

- L'habitude du commerce et du marchandage détermine la notion d'équité :
  - L'offre 50/50 est considérée comme équitable,
  - L'offre 60/40 est considérée comme tolérable
  - Une offre trop faible est considérée comme une offense personnelle
- Toutefois, personne n'est offensé et accepte une offre faible lorsque :
  - l'affectation des rôles n'est pas aléatoire mais résulte d'une compétition
  - un ordinateur fait l'offre

Jeux de l'ultimatum : Quelques conclusions

Interprétation par l'interaction sur l'ensemble de la population

Les personnes sont très sensibles aux injustices :

- Les "offreurs" proposent un cadeau avec un certain coût

  action coopérative

- Les "receveurs" se vengent d'une offre faible avec un certain cout

  punition

- Offres équitables empêchent la punition

  la punition directe renforce la coopération

Le problème de la coopération

- Groupe de défense et fouragement
- Surveillance de prédateur et appel d'alarme
- Protection sociale
- Viabilité globale de certains systèmes

→ Conflit d'intérêt entre les performances d'un individu et d'une communauté

Dilemme social

Principe

- Les **coopérateurs** soutiennent le bien commun malgré un certain coût personnel
- Les **traitres** tentent d'exploiter les ressources en évitant le coût de cette exploitation

Définition

- un groupe de coopérateurs fait mieux qu'un groupe de traitres
- les traitres font mieux que les coopérateurs dans chacun des groupes (coopérateurs ou traitre)

$\Longrightarrow$ Situation de **dilemme social**

Un petit jeux avec vos meilleurs amis

Inspiré de J.P. Delahaye

- Les murs n'étant pas très épais, 2 voisins peuvent entendre la musique de l'autre
- Hard rock punk hard à 22h de l'un
- Le lendemain l'autre voisin : hard rock méga punck

Un petit jeux avec vos meilleurs amis

Inspiré de J.P. Delahaye

- Les murs n'étant pas très épais, 2 voisins peuvent entendre la musique de l'autre
- Hard rock punk hard à 22h de l'un
- Le lendemain l'autre voisin : hard rock méga punck

Réagir ou ne pas réagir pour calmer plus rapidement ?

Un jeux pour vous !

Notre 'jeux' pour 2 joueurs (J1 et J2) :

	Silence	Rock
Silence	3	0
Rock	5	1

- Si J1 = S et J2 = S alors J1 gagne 3 points
  J1 et J2 gagne par la tranquilité de l'environnement
- Si J1 = S et J2 = R alors J1 gagne 0 point
  J1 doit supporter son voisin, aucun gain
- Si J1 = R et J2 = S alors J1 gagne 5 points
  J1 gagne parce qu'il est content de déranger son voisin sans en subir les conséquences
- Si J1 = R et J2 = R alors J1 gagne 1 point
  J1 gagne peu parce qu'il subit aussi des conséquences de sa nuisance

Un jeux pour vous !

	Silence	Rock
Silence	3	0
Rock	5	1

A vous de jouer :

1. Jouer 5 parties de ce jeux avec votre voisin
2. Jouer 5 parties avec un autre voisin
3. Jouer 5 parties avec un autre autre voisin

Petit bilan

- Quel est votre gain ?
- Comparer ces gains avec le gain maximal ?
- Quel est votre stratégie ?

Petit bilan

- Quel est votre gain ?
- Comparer ces gains avec le gain maximal ?
- Quel est votre stratégie ?

Vous venez de découvrir :

- les jeux (formels)
- les jeux itérés

Quelle stratégie est jouée, au final ?...

Petit bilan

- Quel est votre gain ?
- Comparer ces gains avec le gain maximal ?
- Quel est votre stratégie ?

Vous venez de découvrir :

- les jeux (formels)
- les jeux itérés

Quelle stratégie est jouée, au final ?...
Quelle stratégie vaut le coup d'être jouée ?

Jeux à 2 joueurs : notation normalisée

	A	B
A	a	b
B	c	d

- La stratégie A gagne le gain a contre la stratégie A
- La stratégie A gagne le gain b contre la stratégie B
- La stratégie B gagne le gain c contre la stratégie A
- La stratégie B gagne le gain d contre la stratégie B

Jeux à 2 joueurs : notation normalisée

	A	B
A	a	b
B	c	d

- La stratégie A gagne le gain a contre la stratégie A
- La stratégie A gagne le gain b contre la stratégie B
- La stratégie B gagne le gain c contre la stratégie A
- La stratégie B gagne le gain d contre la stratégie B

Quelle stratégie est jouée, au final ?...
Quelle stratégie vaut le coup d'être jouée ?

Equilibre de Nash
Jeux à 2 joueurs

Si
les 2 joueurs jouent la stratégie qui est un équilibre de Nash,
Alors :
aucun des 2 joueurs peut changer de stratégie
et augmenter son gain

	A	B
A	a	b
B	c	d

- A est un équilibre de Nash si $a \geq c$
- A est un équilibre de Nash strict si $a > c$
- B est un équilibre de Nash si $d \geq b$
- B est un équilibre de Nash strict si $d > b$

Equilibre de Nash

	A	B
A	3	0
B	5	1

Equilibre de Nash

	A	B
A	3	0
B	5	1

B équilibre strict de Nash

	A	B
A	3	1
B	5	0

Equilibre de Nash

	A	B
A	3	0
B	5	1

B équilibre strict de Nash

	A	B
A	3	1
B	5	0

A et B ne sont pas des équilibres de Nash

	A	B
A	5	0
B	3	1

Equilibre de Nash

	A	B
A	3	0
B	5	1

B équilibre strict de Nash

	A	B
A	3	1
B	5	0

A et B ne sont pas des équilibres de Nash

	A	B
A	5	0
B	3	1

A et B sont des équilibres stricts de Nash

Equilibre de Nash

Stratégies mixtes :

Joueur plusieurs stratégies de manière stochastique

ex : 0.2 stratégie A et 0.8 stratégie B

Théorème

Pour tout jeux, il existe au moins un équilibre de Nash

Jeux, jeux itérés, équilibre de Nash

Lorsque les joueurs jouent un équilibre de Nash, ils n'ont pas intérêt à changer de stratégie.

Jeux, jeux itérés, équilibre de Nash

Lorsque les joueurs jouent un équilibre de Nash, ils n'ont pas intérêt à changer de stratégie.

Comment décider d'un changement de stratégie ?

Jeux, jeux itérés, équilibre de Nash

Lorsque les joueurs jouent un équilibre de Nash, ils n'ont pas intérêt à changer de stratégie.

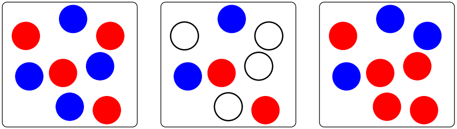
Comment décider d'un changement de stratégie ?

- S'appuyer sur une hypothèse de rationnalité ?
- Considérations psychologiques ?

Jeux évolutionnistes/évolutionnaires

Premiers principes

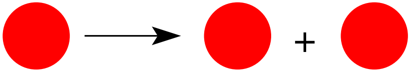
1. Population de joueurs
2. Chaque joueur adopte l'une des 2 stratégies possibles { A, B }
3. Les joueurs **ne changent pas** de stratégie
4. Les joueurs **disparaissent** (meurent) au profit de ceux qui ont les meilleurs performances qui se **reproduisent**



Remarques

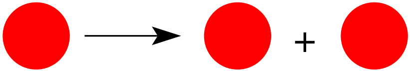
- Pas de considération psychologique sur le changement de stratégie
- Pas d'hypothèse de rationnalité
(connaissance parfaite environnement et décision gain optimale)

Reproduction (une seule stratégie)



- Imaginons des cellules qui se divisent toutes les 20 minutes
- Combien de cellules au bout de 3 jours s'il y a assez de nourritures ?

Reproduction (une seule stratégie)

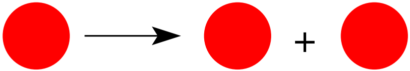


$$x_{t+1} = 2x_t$$

- Imaginons des cellules qui se divisent toutes les 20 minutes
- Combien de cellules au bout de 3 jours s'il y a assez de nourritures ?

- x_t : nombre de cellules au temps t
- x_{t+1} : nombre de cellules au temps $t+1$

Reproduction (une seule stratégie)



- Imaginons des cellules qui se divisent toutes les 20 minutes
- Combien de cellules au bout de 3 jours s'il y a assez de nourritures ?

$$x_{t+1} = 2x_t$$

- x_t : nombre de cellules au temps t
- x_{t+1} : nombre de cellules au temps $t+1$

pour tout $t \geq 0$,

$$x_t = x_0 2^t$$

Equation générale en temps discrétisé

Evolution des moyennes

- x_t : nombre moyen d'individus au temps t
- x_{t+1} : nombre moyen d'individus au temps $t+1$

$$x_{t+1} = (1 + r)x_t$$
$$\text{avec } r \in [0, +\infty[$$

Equation générale en temps discrétisé

Evolution des moyennes

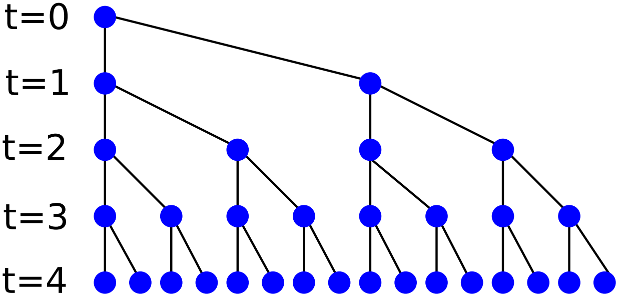
- x_t : nombre moyen d'individus au temps t
- x_{t+1} : nombre moyen d'individus au temps $t+1$

$$x_{t+1} = (1+r)x_t$$
$$\text{avec } r \in [0, +\infty[$$

Solution : croissance exponentielle

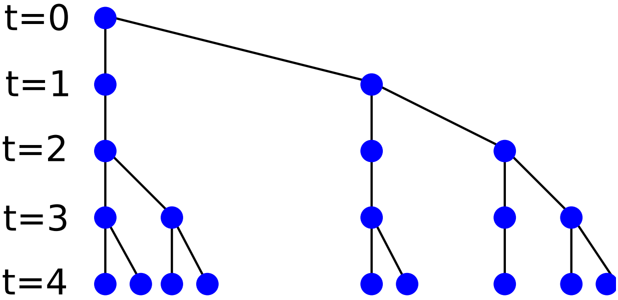
$$x_t = (1+r)^t x_0 \text{ avec } r \geq 0$$

Reproduction



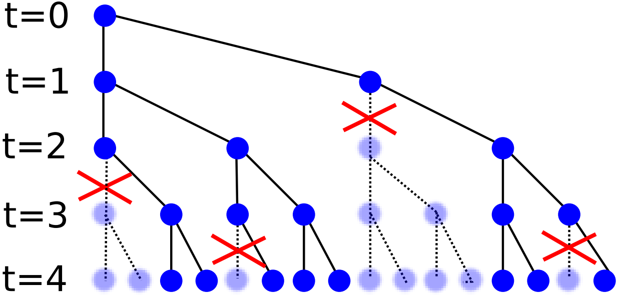
$r = 1$

Reproduction



$r \approx 0.75$

Disparition : Cellules meurt



$d \approx 0.5$

Disparition : individus mortels

- Taux de mortalité d : disparition de $d.x_t$ individus

Modélisation en temps discrèt : suite

$$x_{t+1} = x_t + rx_t - dx_t$$

Disparition : individus mortels

- Taux de mortalité d : disparition de $d.x_t$ individus

Modélisation en temps discrèt : suite

$$x_{t+1} = x_t + rx_t - dx_t$$

$$x_{t+1} = (1 + r - d)x_t$$

Disparition : individus mortels

- Taux de mortalité d : disparition de $d.x_t$ individus

Modélisation en temps discrèt : suite

$$x_{t+1} = x_t + rx_t - dx_t$$

$$x_{t+1} = (1 + r - d)x_t$$

Dynamiques possibles

- si $r > d$: la taille de la population augmente indéfiniment
- si $r < d$: la population s'éteint
- Si $r = d$: la taille de la population reste constante, mais la situation est instable.
  une petite variation provoque l'expansion ou la disparition

Reproduction / Disparition : modélisation stochastique

Modélisation déterministe *vs.* stochastique

- **Modèle déterministe** : pas de variable aléatoire, relation fonctionnelle entre les variables
  La variabilité n'est pas modélisée (valeurs moyennes, grande population, etc.), crainte des conséquences des événements rares
- **Modèle stochastique** : variable(s) aléatoires(s)
  Distribution de valeurs au lieu d'une valeur unique

Bien sùr un mixte est possible selon les situations...

Reproduction / Disparition : modélisation stochastique

Modélisation déterministe *vs.* stochastique

- **Modèle déterministe** : pas de variable aléatoire, relation fonctionnelle entre les variables
  La variabilité n'est pas modélisée (valeurs moyennes, grande population, etc.), crainte des conséquences des événements rares
- **Modèle stochastique** : variable(s) aléatoires(s)
  Distribution de valeurs au lieu d'une valeur unique

Bien sùr un mixte est possible selon les situations...

- Population de taille finie
- La reproduction suit une loi de Bernouilli de paramètre $r < 1$ (au plus un enfant par génération)
- La disparition suit une loi de Bernouilli de paramètre $d < 1$

Simulation informatique en NetLogo

Simulation stochastique en temps discret

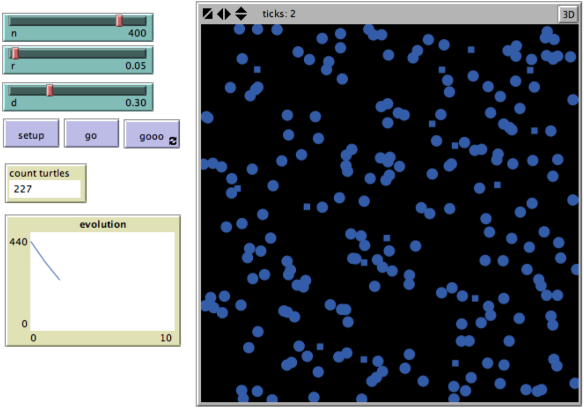
- Population de taille finie n
- La reproduction suit une loi de Bernouilli de paramètre $r < 1$ (au plus un enfant par génération)
- La disparition suit une loi de Bernouilli de paramètre $d < 1$

Truc : Ajout d'un age à chaque individus pour interdire la reproduction et la dispartition à la naissance

```
turtles-own [
  age
]
```

Simulation en NetLogo
Initialisation

```
to setup
  clear-all
  init
  dessiner
  reset-ticks
end
```



Simulation en NetLogo : une génération

```
to go
  veillir
  reproduction
  disparition
  dessiner
  tick
end
```

Simulation NetLogo
Reproduction

```
to reproduction
  ask turtles with [ age > 0 ] [
    if random-float 1.0 < r [
      hatch 1 [ nouveau-ne ]
    ]
  ]
end
```

Simulation NetLogo
Disparition

```
to disparition
  ask turtles with [ age > 0 ] [
    if random-float 1.0 < d [ die ]
  ]
end
```

Jeux évolutionnistes / évolutionnaires

Principes

1. Population de joueurs
2. Chaque joueur adopte l'une des 2 stratégies possibles { A, B }
3. Les joueurs ne changent pas de stratégie
4. Les joueurs disparaissent (meurent) au profit de ceux qui ont les meilleurs performances qui se reproduisent
5. **Variation taille des populations est proportionnelle à :**
   - **la taille de la population**
   - **la performance de la stratégie (fitness)**
6. **Performance de la stratégie (fitness) dépend de la taille des 2 sous-populations de joueurs**

Reproduction
Sans disparition

5 Variation de la taille des populations est proportionnelle à :
- la taille de la population
- la performance de la stratégie (fitness)

Equation reproduction sans disparition

$$x_{A,t+1} = (1 + f_A)x_{A,t}$$
$$x_{B,t+1} = (1 + f_B)x_{B,t}$$

Avec :

$x_{A,t}$ et $x_{B,t}$ taille de la population A et B resp. au temps t

f_A et f_B fitness de la population A et B resp. au temps t

Disparation

- Taux de mortalité d identique dans chaque sous-population

$$x_{A,t+1} = (1 + f_A - d)x_{A,t}$$
$$x_{B,t+1} = (1 + f_B - d)x_{B,t}$$

Disparation

- Taux de mortalité d identique dans chaque sous-population

$$\begin{aligned} x_{A,t+1} &= (1 + f_A - d) x_{A,t} \\ x_{B,t+1} &= (1 + f_B - d) x_{B,t} \end{aligned}$$

- **Ressources limitées** ne peuvent nourrir qu'au plus un même nombre d'individus : **Pression de sélection**
- Taille de population constante :

$$\forall t \quad x_{A,t} + x_{B,t} = 1$$

Disparation

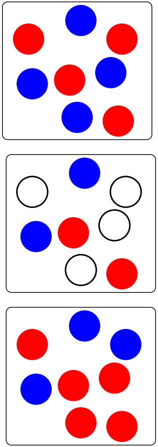
- Taux de mortalité d identique dans chaque sous-population

$$x_{A,t+1} = (1 + f_A - d)x_{A,t}$$
$$x_{B,t+1} = (1 + f_B - d)x_{B,t}$$

- **Ressources limitées** ne peuvent nourrir qu'au plus un même nombre d'individus : **Pression de sélection**
- Taille de population constante :

$$\forall t \quad x_{A,t} + x_{B,t} = 1$$

$$d = x_{A,t} f_A + x_{B,t} f_B$$
(couplage des équations)



$f_A = 2$ et $f_B = 1$

Evolution sous sélection constante

Les fitness sont constantes :

$$f_A = F_A \text{ et } f_B = F_B$$

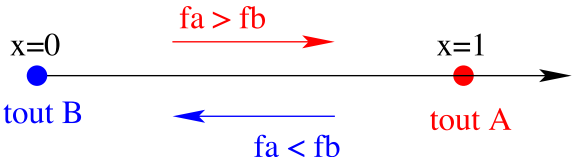
En posant :

$$x_{A,t} = x_t \text{ et } x_{B,t} = 1 - x_t$$

On en déduit par substitution :

$$x_{t+1} - x_t = (f_A - f_B)(1 - x_t)x_t$$

Equation non linéaire avec 2 états stables :



Simulation informatique en NetLogo du modèle stochastique

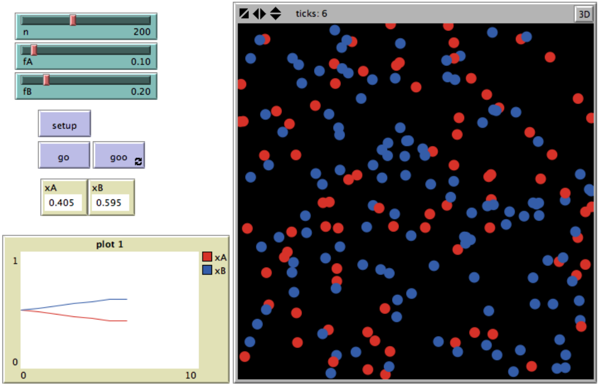
Simulation stochastique en temps discret

- Population de taille finie n
- Fitness constantes, les reproductions suivent des lois de Bernouilli de paramètres $f_A < 1$ et $f_B < 1$ (au plus un enfant par génération)
- La disparition suit une loi uniforme réduisant la population à la taille n

```
turtles-own [
  strategy
  fitness
]
```

Simulation en NetLogo
Initialisation

```
to setup
  clear-all
  init
  dessiner
  reset-ticks
end
```



Simulation en NetLogo : une génération

```
to go
  reproduction
  disparition
  dessiner
  tick
end
```

Simulation NetLogo
Reproduction

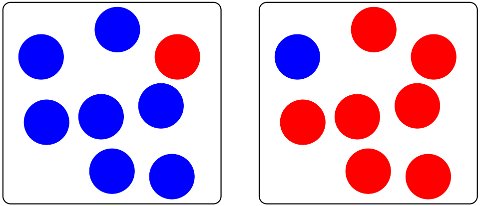
```
to reproduction
  ask turtles [
    if random-float 1.0 < fitness [
      hatch 1 [ nouveau-ne strategy ]
    ]
  ]
end
```

Simulation NetLogo
Disparition

```
to disparition
  let ndisparition count turtles - n
  ask n-of nDisparition turtles [ die ]
end
```

Jeux évolutionnistes : sélection non constante

6 Performance de la stratégie (fitness) dépend de la taille des 2 sous-populations de joueurs



fitness A < fitness B   fitness A > fitness B

La fitness dépend de la composition de la population, de la taille de chaque sous-population

Jeux à 2 joueurs

Les fitness dépendent de x_A et x_B :

$$f_A = f_A(x_A, x_B) \text{ et } f_B = f_B(x_A, x_B)$$

$$x_{A,t+1} = (1 + f_A(x_A, x_B) - d)x_{A,t}$$
$$x_{B,t+1} = (1 + f_B(x_A, x_B) - d)x_{B,t}$$

- Comment définir les fonctions de gain (fitness) f_A et f_B ?

Jeux à 2 joueurs

	A	B
A	a	b
B	c	d

- A gagne le gain a lorsqu'il joue contre A
- A gagne le gain b lorsqu'il joue contre B
- B gagne le gain c lorsqu'il joue contre A
- B gagne le gain d lorsqu'il joue contre B

Jeux à 2 joueurs

	A	B
A	a	b
B	c	d

- A gagne le gain a lorsqu'il joue contre A
- A gagne le gain b lorsqu'il joue contre B
- B gagne le gain c lorsqu'il joue contre A
- B gagne le gain d lorsqu'il joue contre B

Rencontre aléatoire des joueurs.
Chaque joueur rencontre :

- A avec une probabilité x_A
- B avec une probabilité x_B

fitness = espérance du gain

$$f_A = ax_A + bx_B$$
$$f_B = cx_A + dx_B$$

Evolutionarily Stable Strategy (ESS) - J. Maynard Smith

Imaginons une large population de joueurs A.
Un mutant de type B est introduit dans la population.

- Quelle condition interdit l'invasion de A par B ?

posons $x_B = \epsilon$

$$f_A > f_B \text{ donne } a(1-\epsilon) + b\epsilon > c(1-\epsilon) + d\epsilon$$

en négligeant les termes en ϵ (quand on peut) :

$$a > c, \text{ ou } a = c \text{ et } b > d$$

Evolutionarily Stable Strategy

A est un ESS ssi soit $a > c$, soit $a = c$ et $b > d$.

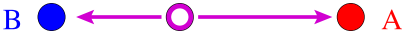
strict Nash $\Rightarrow$ ESS $\Rightarrow$ weak ESS $\Rightarrow$ Nash

5 Dynamiques possibles

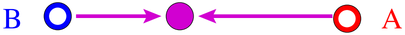
- A domine B, si $a > c$ et $b > d$

- B domine A, si $a < c$ et $b < d$

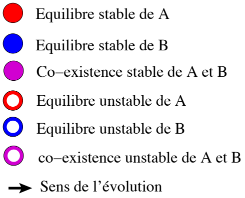
- A et B sont bi-stable, si $a > c$ et $b < d$



- A et B co-existent, si $a < c$ et $b > d$



- A et B sont neutres, si $a = c$ et $b = d$



Pause historique et bibliographique

- Théorie des jeux inventée par John Von Neumann et Oskar Morgenstein (1944)
- John Nash "This man is genius" : prix Nobel en 1950, équilibre de Nash
- Domaine scientifique : John Maynard Smith, Price (1973), application à la biologie et l'évolution des populations
- J.M. Smith : evolutionarily Stable Strategy
- essor dans les années 1990 et 2000
- Hofbauer et Sigmund : "Evolutionary Game and population dynamics". Cambridge : Cambridge university Press, 1998.

La théorie des jeux ne repose pas sur la rationalité. Population de joueurs de stratégie fixe. Interaction aléatoire. Le gain est interprété comme une fitness, un taux de reproduction.

Faucon ou Colombe (Hawk or Dove) ?

Combat / Rivalité entre animaux

- Les animaux d'une même espèce se battent entre eux : Conflit pour la nourriture, le territoire, le sexe, etc.
- Toutefois les conflits n'escaladent pas tous : combats conventionnels, peu de combat mène à de sérieux dégâts

Faucon ou Colombe (Hawk or Dove) ?

Combat / Rivalité entre animaux

- Les animaux d'une même espèce se battent entre eux : Conflit pour la nourriture, le territoire, le sexe, etc.
- Toutefois les conflits n'escaladent pas tous : combats conventionnels, peu de combat mène à de sérieux dégâts

Explication classique

- Combats conventionnels sont bons pour l'espèce
- Combats terribles sont mauvais pour l'espèce

Faucon ou Colombe (Hawk or Dove) ?

Combat / Rivalité entre animaux

- Les animaux d'une même espèce se battent entre eux : Conflit pour la nourriture, le territoire, le sexe, etc.
- Toutefois les conflits n'escaladent pas tous : combats conventionnels, peu de combat mène à de sérieux dégâts

Explication classique

- Combats conventionnels sont bons pour l'espèce
- Combats terribles sont mauvais pour l'espèce

Problème

- Vrai au niveau d'un groupe ou d'une espèce, mais la sélection agit sur les individus
- Si un individu désobéit à la règle et inflige des dégâts à l'adversaire, il doit en tirer un avantage reproductif

Faucon ou Colombe ? - J. Maynard Smith

2 espèces :

- H : Faucons qui font monter le combat
- D : Colombes qui se retirent toujours d'un combat

Gains :

- b : gain d'avoir gagné un combat
- c : cout de la perte

	H	D
H	$\frac{b-c}{2}$	b
D	0	$\frac{b}{2}$

Gains :

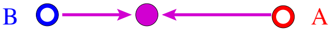
- un faucon face à une colombe gagne b contre 0
- lorsque 2 animaux de la même espèce se rencontrent, il partage le paiement.

Faucon ou Colombe ?

	H	D
H	$\frac{b-c}{2}$	b
D	0	$\frac{b}{2}$

Si $b < c$ (gain combat $<$ cout perte) :

- Pas d'équilibre de Nash
- Co-existence des espèces : proportion de faucons $\frac{b}{c}$



Jeux de la poule mouillée

2 voitures roulent face à face à grande vitesse, le perdant est celui qui sort en premier de sa voiture

2 stratégies :

- A : on reste dedans
- B : on saute après un certain temps

Gains et perte :

- $-c$: perte due à la collision
- b : gain si gagnant

	A	B
A	$-c$	b
B	0	$\frac{b}{2}$

Jeux de la poule mouillée

2 voitures roulent face à face à grande vitesse, le perdant est celui qui sort en premier de sa voiture

2 stratégies :

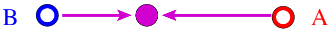
- A : on reste dedans
- B : on saute après un certain temps

Gains et perte :

- $-c$: perte due à la collision
- b : gain si gagnant

	A	B
A	$-c$	b
B	0	$\frac{b}{2}$

- pas d'équilibre de Nash
- Co-existence des stratégies



Dilemme des prisonniers

Deux prisonniers se font prendre, ils sont interrogés séparément.

2 stratégies :

- Soit il dénonce son camarade (défection D)
- Soit il coopère et reste silencieux (coopération C)

traduction en années de prison :

	C	D
C	-1	-10
D	0	-7

Que faire ? ? ? ?

Dilemme des prisonniers

traduction en gain :

	C	D
C	3	0
D	5	1

- Dynamique d'évolution vers traitrise

Dilemme des prisonniers

	C	D
C	R	S
D	T	P

- $T > R$
- $P > S$
- $R > P$
- Et même : $R > (T + P)/2$: pour garantir que l'alternance est moins bonne que la coopération

- Défection est un équilibre de Nash
- La coopération mutuelle est plus avantageuse que la défection

Pas de coopération avec une dynamique évolutionniste

Dilemme des prisonniers itéré : réciprocité directe

Le jeux est répété m fois.
2 stratégies :

- GRIM : coopère la première fois jusqu'à la première traitrise adversaire
- ALLD : toujours la défection

	GRIM	ALLD
GRIM	mR	$S + (m-1)P$
ALLD	$T + (m-1)P$	mP

- si $mR > T + (m-1)P$, GRIM est un équilibre de Nash : la coopération se maintient

$$m > \frac{T-P}{R-P}$$

- ALLD est aussi un équilibre de Nash :
GRIM n'explique pas l'apparition de la coopération

Oeil pour oeil : tit-for-tat

Tournoi d'Axelrod

stratégie tit-for-tat :

- TFT : coopération, puis reproduit la stratégie de l'adversaire

- Tournoi gagné face à des stratégies inconnues
- TFT ne reste pas bloqué dans la traitrise

	TFT	ALLD
TFT	mR	$S + (m-1)P$
ALLD	$T + (m-1)P$	mP

Simulation informatique en NetLogo du modèle stochastique

Simulation stochastique en temps discret

- Population de taille finie n
- Fitness variables (cf. avant),

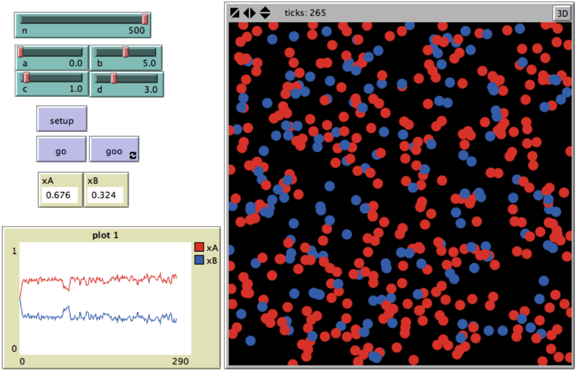
Simulation informatique en NetLogo du modèle stochastique

Simulation stochastique en temps discret

- Population de taille finie n
- Fitness variables (cf. avant),
  Au moins $E[f_A]$ et $E[f_B]$ enfants,
  puis lois de Bernouilli de paramètres $f_A - E[f_A]$ et $f_B - E[f_B]$
- La disparition suit une loi uniforme réduisant la population à la taille n

Simulation en NetLogo : une génération

```
to go
  calcul-fitness
  reproduction
  disparition
  dessiner
  tick
end
```



Simulation NetLogo

Reproduction

```
to reproduction
  ask turtles [
    let k floor fitness
    hatch k [ nouveau-ne strategy ]
    if random-float 1.0 < (fitness - k)
    [ hatch 1 [ nouveau-ne strategy ] ]
  ]
end
```

Bilan

- Jeux, Jeux itérés, Jeux évolutionnaires
- Pas d'hypothèse de rationnalité
- Modélise beaucoup de situations

Systèmes complexes

Les systèmes complexes sont composés d'entités hétérogènes en interaction forte et structurées en plusieurs niveaux d'organisation. Ces systèmes sont non-linéaires.

Alors quoi encore...

Bilan

- Jeux, Jeux itérés, Jeux évolutionnaires
- Pas d'hypothèse de rationnalité
- Modélise beaucoup de situations

Systèmes complexes

Les systèmes complexes sont composés d'entités hétérogènes en interaction forte et structurées en plusieurs niveaux d'organisation. Ces systèmes sont non-linéaires.

Alors quoi encore...

- Jeux spaciaux ou 'en réseaux'...