

Fiche 04 : Machine de Turing une correction

Licence 3 informatique
2022 / 2023

Exercice 1 : Construire des machines de Turing

1.a. La machine de Turing se définit comme l'automate fini reconnaissant le langage régulier.

	a	b	c	□
$\rightarrow q_0$	a , \rightarrow , q_1	b , \rightarrow , q_0	c , \rightarrow , q_0	refusé
q_1	a , \rightarrow , q_1	b , \rightarrow , q_2	c , \rightarrow , q_0	refusé
q_2	a , \rightarrow , q_1	b , \rightarrow , q_0	c , \rightarrow , q_0	accepté

1.b. L'idée de la machine est :

- de mémoriser à l'aide des états le premier symbole lu, de l'effacer du ruban pour le marquer comme lu ;
- puis de positionner la tête de lecture à la fin du mot pour vérifier que le même symbole se situe à la fin du mot,
- si le symbole lu est correct, il faut recommencer en positionnant la tête de lecture de nouveau en début du mot.

La possibilité d'effacer un symbole du ruban permet de marquer (mémoriser) la lecture, ce que ne permet pas un automate fini.

	0	1	□
$\rightarrow q_0$	□, \rightarrow , q_1	□, \rightarrow , q_2	accepté
q_1	0 , \rightarrow , q_1	1 , \rightarrow , q_1	□, \leftarrow , q_3
q_2	0 , \rightarrow , q_2	1 , \rightarrow , q_2	□, \leftarrow , q_4
q_3	□, \leftarrow , q_5	refusé	accepté
q_4	refusé	□, \leftarrow , q_5	accepté
q_5	0 , \leftarrow , q_5	1 , \leftarrow , q_5	□, \rightarrow , q_0

Explications :

Les états q_1 et q_3 mémorisent que le symbole 0 a été lu en début de mot par la machine, et les états q_2 et q_4 que le symbole 1 a été lu.

Les états q_1 et q_2 sont utilisés de la même manière pour déplacer la tête de lecture jusqu'à la fin du mot sans modifier les symboles du ruban. Lorsque la fin du mot est atteinte, la machine est, respectivement, dans les états q_3 et q_4 . C'est une technique très courante.

L'état q_5 est aussi utilisé pour déplacer la tête de lecture mais cette fois en début de mot.

- 1.c. La technique est quasiment la même que pour le langage des palindromes. Seulement, d'une part, le processus est répété deux fois pour reconnaître $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, puis reconnaître $\{b^n c^n \mid n \geq 0\}$, et d'autre part, au lieu d'effacer le symbole b , on écrit un symbole x pour ne pas perdre la trace du nombre de symbole b .

	a	b	c	x	□
$\rightarrow q_0$	□, \rightarrow , q_1	refusé	refusé	□, \rightarrow , Q_1	
q_1	a, \rightarrow , q_1	b, \rightarrow , q_1	c, \leftarrow , q_2	refusé	refusé
q_2	refusé	x, \leftarrow , q_3		refusé	refusé
q_3	a, \leftarrow , q_3	b, \leftarrow , q_3			□, \rightarrow , q_0
Q_0	refusé	refusé	refusé	□, \rightarrow , Q_1	accepté
Q_1	refusé	refusé	c, \rightarrow , Q_1	x, \rightarrow , Q_1	□, \leftarrow , Q_2
Q_2	refusé	refusé	□, \leftarrow , Q_3	refusé	
Q_3			c, \leftarrow , Q_3	x, \leftarrow , Q_3	□, \rightarrow , Q_0

Exercice 2 : Langage reconnu

	0	1	X	Y	□
$\rightarrow q_0$	q_1, X, \rightarrow	q_3, X, \rightarrow		q_0, Y, \rightarrow	$q_5, \square, \rightarrow$
q_1	$q_1, 0, \rightarrow$	q_2, Y, \leftarrow		q_1, Y, \rightarrow	
q_2	$q_2, 0, \leftarrow$		q_0, X, \rightarrow	q_2, Y, \leftarrow	
q_3	q_4, Y, \leftarrow	$q_3, 1, \rightarrow$		q_3, Y, \rightarrow	
q_4		$q_4, 1, \leftarrow$	q_0, X, \rightarrow	q_4, Y, \leftarrow	
q_5					

$$L(M) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\} \cup \{1^n 0^n \mid n \geq 0\}$$

Exercice 3 : Langage des mots répétés

$$L_{3a} = \{w c w : w \in \{a, b\}^+\}$$

	a	b	c	x	□
$\rightarrow q_0$	□, \rightarrow , q_1	□, \rightarrow , q_4	c, \rightarrow , q_6	refusé	refusé
q_1	a, \rightarrow , q_1	b, \rightarrow , q_1	c, \rightarrow , q_2	refusé	refusé
q_2	x, \leftarrow , q_3	refusé	refusé	x, \rightarrow , q_2	refusé
q_3	a, \leftarrow , q_3	b, \leftarrow , q_3	c, \leftarrow , q_3	x, \leftarrow , q_3	□, \rightarrow , q_0
q_4	a, \rightarrow , q_4	b, \rightarrow , q_4	c, \rightarrow , q_5	refusé	refusé
q_5	refusé	x, \leftarrow , q_3	refusé	x, \rightarrow , q_5	refusé
q_6	refusé	refusé	refusé	x, \rightarrow , q_6	accepté

$$L_{3b} = \{ww : w \in \{a, b\}^+\}$$

Pour ce langage, une tactique consiste à introduire la lettre c entre les deux mots potentiels pour retrouver le langage précédent et la machine le reconnaissant. Il faut donc séparer les deux mots potentiels en décalant la seconde moitié.

	a	b	□	A	B
→q ₀	A, →, q ₁	B, →, q ₂	c, ←, q ₅		
q ₁	a, →, q ₁	b, →, q ₂	a, ←, q ₃		
q ₂	a, →, q ₁	b, →, q ₂	b, ←, q ₃		
q ₃	□, ←, q ₄	□, ←, q ₄			
q ₄	a, ←, q ₄	b, ←, q ₄		A, →, q ₀	B, →, q ₀
q ₅			□, →, q ₆	a, ←, q ₅	b, ←, q ₅

À partir de l'état q₆, il faut reprendre (en renumérotant) la machine du langage L_{3a} pour obtenir le résultat.

Exercice 4 : Calcul en unaire

4.a. Ajout de 1 :

	1	□
→q ₀	1, →, q ₀	1, →, q ₁
q ₁	arrêt	arrêt

4.b. Somme de deux nombres :

	1	□
→q ₀	1, →, q ₀	1, →, q ₁
q ₁	1, →, q ₁	□, ←, q ₂
q ₂	□, →, q ₃	□, →, q ₃
q ₃	arrêt	arrêt

4.c. Produit par deux :

	1	a	b	□
→q ₀	a, →, q ₁		b, ←, q ₃	□, →, q ₅
q ₁	1, →, q ₁		b, →, q ₁	b, ←, q ₂
q ₂	1, ←, q ₂	a, →, q ₀	b, ←, q ₁	
q ₃		a, ←, q ₃	b, ←, q ₃	□, →, q ₄
q ₄		1, →, q ₄	1, →, q ₄	□, →, q ₅
q ₅	arrêt	arrêt	arrêt	arrêt

Exercice 5 : Calcul en binaire

4.a. Somme en binaire avec 3 rubans. On suppose les têtes de lectures au début à droite de chaque nombre. Le troisième ruban sert à écrire le résultat.

q_0 est l'état sans retenue, q_1 l'état avec retenue. Pour simplifier nous supposons que toutes les têtes de lectures se déplacent par le même mouvement, et seule la lecture des 2 premiers rubans est prise en compte, et l'écriture ne concerne que le troisième ruban.

	0 0	0 1	1 0	1 1	0 □	□ 0	1 □	□ 1	□ □
$\rightarrow q_0$	0, ←, q_0	1, ←, q_0	1, ←, q_0	0, ←, q_1	0, ←, q_0	0, ←, q_0	1, ←, q_0	1, ←, q_0	arrêt
q_1	1, ←, q_0	0, ←, q_1	0, ←, q_1	1, ←, q_1	1, ←, q_0	1, ←, q_0	0, ←, q_1	0, ←, q_1	1, ←, q_0

4.b. Produit de deux nombres.

On peut utiliser l'algorithme de multiplication habituel. Sur le troisième ruban, on écrit la somme partielle de la multiplication de chaque chiffre binaire. Lorsqu'on multiplie par 0, le résultat n'est pas changé, lorsqu'on multiplie par 1, on additionne le nombre courant. Lorsqu'on passe au chiffre suivant, on ajoute un 0 au premier nombre. α_1 et α_3 sont des symboles quelconque différents de □.

	α_1 0 α_3	□ 0 α_3	α_1 1 α_3	α_1 1 □	□ 1 α_3	α_1 □ α_3
$\rightarrow q_0$	α_1 0 α_3 , ←↓↓, q_1		α_1 1 α_3 , ↓↓↓, q_2			arrêt
q_1		0 0 α_3 , ↓←↓, q_0				
q_4			α_1 1 α_3 , ↓↓→, q_4	α_1 1 □, ↓↓←, q_5		
q_5			α_1 1 α_3 , →↓↓, q_5		0 1 α_3 , ↓←↓, q_0	

La somme entre le premier ruban et le troisième, dont le résultat est écrit sur le troisième ruban. La tête sur le ruban 2 ne bouge pas.

	0 1 0	0 1 1	1 1 0	1 1 1	0 1 □	□ 1 0	1 1 □	□ 1 1	□ 1 □
q_2	0, ←↓←, q_2	1, ←, q_2	1, ←, q_2	0, ←, q_2	0, ←, q_2	0, ←, q_2	1, ←, q_2	1, ←, q_2	q_0
q_3	1, ←, q_2	0, ←, q_3	0, ←, q_3	1, ←, q_3	1, ←, q_3	1, ←, q_2	0, ←, q_3	0, ←, q_3	1, ←, q_2