Automate pondéré

Informatique Théorique 2
Licence 3 informatique

Sébastien Verel
verel@univ-littoral.fr
http://www-lisic.univ-littoral.fr/~verel

Université du Littoral Côte d'Opale
Laboratoire LISIC
Equipe OSMOSE

Plan

Objectifs de la séance 03

-

Automate fini

Fonction à valeur booléenne définie sur l'ensemble des mots

$$A : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$$

Répond à un problème de décision :

si $A(w) = 0$ alors $w \notin L_A$
si $A(w) = 1$ alors $w \in L_A$

Pourquoi ne pas généraliser ?

Fonction à valeur dans $\mathbb{R}$ définie sur l'ensemble des mots :

Automate pondéré

$$A : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{R}$$

Automate fini

Fonction à valeur booléenne définie sur l'ensemble des mots

$$A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$$

Répond à un problème de décision :

si $A(w) = 0$ alors $w \notin L_A$

si $A(w) = 1$ alors $w \in L_A$

Pourquoi ne pas généraliser ?

Fonction à valeur dans $\mathbb{R}$ définie sur l'ensemble des mots :

Automate pondéré

$$A : \Sigma^* \to \mathbb{R}$$

Fonction à valeur dans Σ_2^* définie sur l'ensemble des mots :

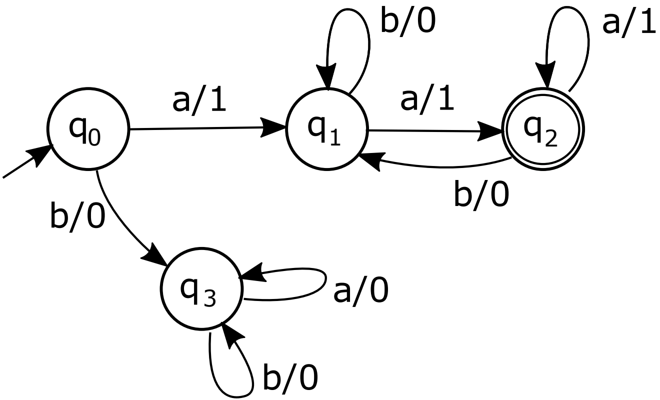
Transducteur

$$T : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$$

Source, bibliographie

[1] "Speech recognition with weighted finite-state transducers", Mohri *et al.*, 2008.
[2] Suresh, A. T., Roark, B., Riley, M., Schogol, V. (2021). Approximating probabilistic models as weighted finite automata. Computational Linguistics, 47(2), 221-254.
[3] wikipedia, pages "Automate pondéré", et "Finite-state transducer"

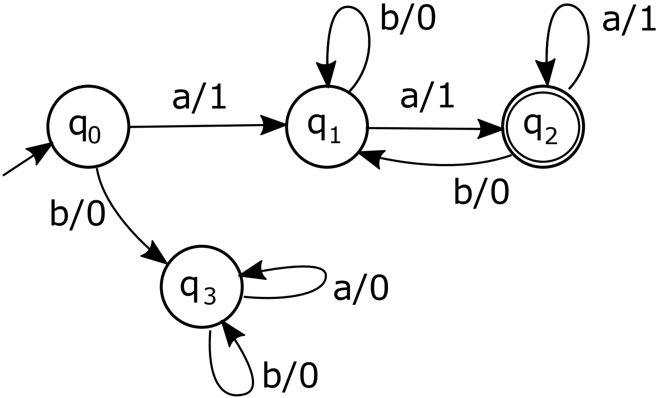
Idée : ajouter des poids aux transitions



Principe

Lors de la lecture du mots, les poids des étiquettes sont agrégées

Idée : ajouter des poids aux transitions



Principe

Lors de la lecture du mots, les poids des étiquettes sont agrégées

Le mot *abbaa* est accepté par l'automate, et le poids du mot est : $1 + 0 + 0 + 1 + 1 = 3$

Automate fini déterministe

Automate fini déterministe

Un **automate fini déterministe** (AFD) est un quintuplet (Q, Σ, T, q_0, A) où :

- Σ est l'*alphabet* de l'automate,
- Q un ensemble **fini** appelé *ensemble des états* de l'automate,
- T est un sous-ensemble de $Q \times \Sigma \times Q$, appelée la *fonction de transition*
- q_0 est un élément de Q, appelé l'*état initial*
- A est un sous-ensemble de Q, appelé l'ensemble des *états acceptants*.

Automate (fini) pondéré

Automate fini pondéré

Un **automate fini pondéré** est un quintuplet $(Q, \Sigma, T, q_0, A, \lambda, \mu, \rho)$ où :

- Σ est l'*alphabet* de l'automate,
- Q un ensemble fini
- T est un sous-ensemble de $Q \times \Sigma \times Q$
- q_0 est un élément de Q
- A est un sous-ensemble de Q
- $\lambda : Q \to \mathbb{R}$ est une fonction de poids d'entrée
- $\mu : T \to \mathbb{R}$ est une fonction de poids des transitions
- $\rho : Q \to \mathbb{R}$ est une fonction de poids de sortie

Lecture

Notations

Etant donné une transition $e \in T$, on note $p[e]$ l'origine et $n[e]$ la destination de la transition, et $w[e]$ le poids de la transition.

Poids d'un chemin

Un chemin $\pi = e_1 \dots e_n$ est une suite de transitions telle que pour tout $i \in [1, \dots, n-1]$, $n[e_i] = p[e_{i+1}]$.

Le poids d'un chemin π est le "produit" des poids des transitions :

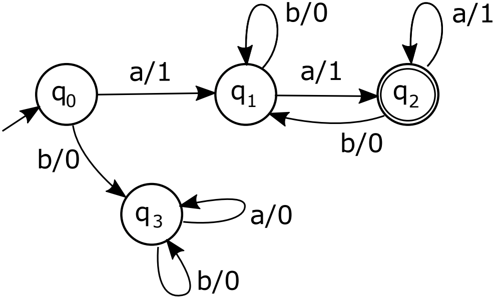
$$w[\pi] = \lambda(p[e_1]) \otimes \mu(e_1) \otimes \dots \otimes \mu(e_n) \otimes \rho(n[e_n])$$

La notation "produit" $\otimes$ peut être selon les cas l'addition, la multiplication, etc. (la loi interne d'un semi-anneau en fait)

Lecture

La lecture est définie de manière identique à un automate fini classique, le poids du chemin de lecture π est alors $w[\pi]$.

Exemple



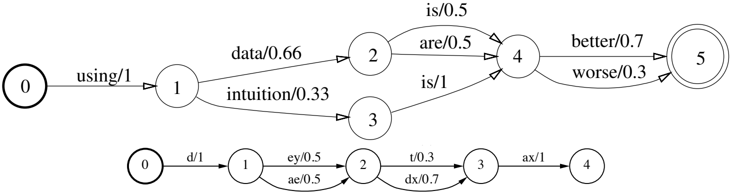
Calculer (à l'aide de la somme) le poids des lectures des mots *abbbaaba*, *baaaa*, *abbbbab*.
Intuitivement, que représente le poids ?

Exemple

Sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, définir un automate pondéré qui reconnait le langage des mots dont la différence entre le nombre de a et le nombre de b est un multiple de 3, et qui calcule la différence entre ces nombres.

Automate probabiliste

Les poids sont interprétés comme des probabilités.
Cette interprétation permet d'ajouter une probabilité d'apparition du mot



source : "Speech recognition with weighted finite-state transducers", Mohri *et al.*, 2008.

Conclusion

On peut alors se poser les mêmes questions :

- Quelle est la représentation algébriques des langages reconnus (séries rationnelles) ?
- Non Déterministe, déterminisate ?
- Opérations algébriques
- Automate minimal
- Comment construire ces automates (inférence, machine learning !) ?

On peut aussi imaginer d'autres modèles d'automate :
cf. Transducteur fini, etc.