Métaheuristiques et Paysages Adaptatifs pour l'Optimisation Difficile

Master 2 PLMT - programmation évolutionnaire

Sébastien Verel
verel@i3s.unice.fr
www.i3s.unice.fr/∼verel

Équipe TEA - Université de Nice-Sophia Antipolis

5 janvier 2006

Plan

1. Métaheuristiques
   - Problèmes d'optimisation
   - Métaheuristiques
2. Paysage Adaptatif
3. Ensemble de Neutralité
4. Réseau de Neutralité
5. Dynamique et Métaheuristique dans les Paysages Neutres

Modélisation de Problèmes

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Résolution d'un problème :

Problème $\Rightarrow$ modélisation $\Rightarrow$ solution(s)

Modélisation :

- simplification de la réalité (nombre de paramètres, "bruit", défauts...)

Conception d'un (bon) modèle :

- Connaissance experte du domaine
- Connaissance des méthodes de résolution (informatique)

Problèmes d'optimisation combinatoire

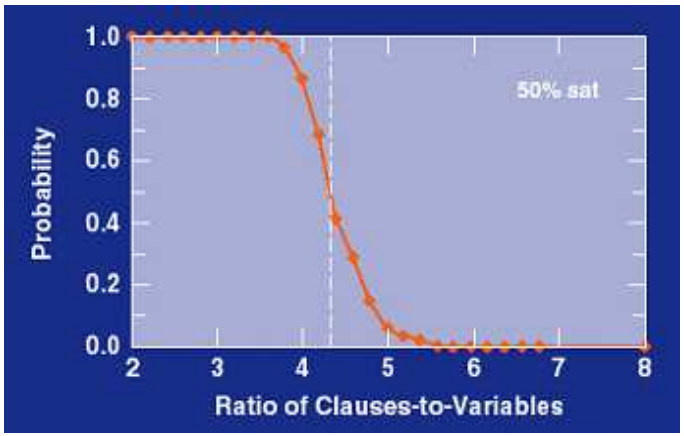
- MAX - SAT
- Coloration de graphe
- Voyageur de commerce (TSP)
- Quadratic Assignment Problem (QAP)
- Schudeling
- paysages NK
- Sudoku (coloration de graphe)

SAT

Premier problème NP-difficile

$$\bigwedge_{j=1}^{m} C_j$$

où $C_j = \bigvee_{i=1}^{k_j} l_{i,j}$ et
$l_i = x_n$ ou $\bar{x_n}$



- N variables booléennes : $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$,
- m clauses : $\{C_1, C_2, ..., C_m\}$.
- k_j littérals par clause C_j : $\{l_{1,j}, l_{2,j}, ..., l_{k_j,j}\}$,

Transition de phase suivant
$\alpha = \frac{m}{N}$

Applications : vérification de circuits, logique, informatique...

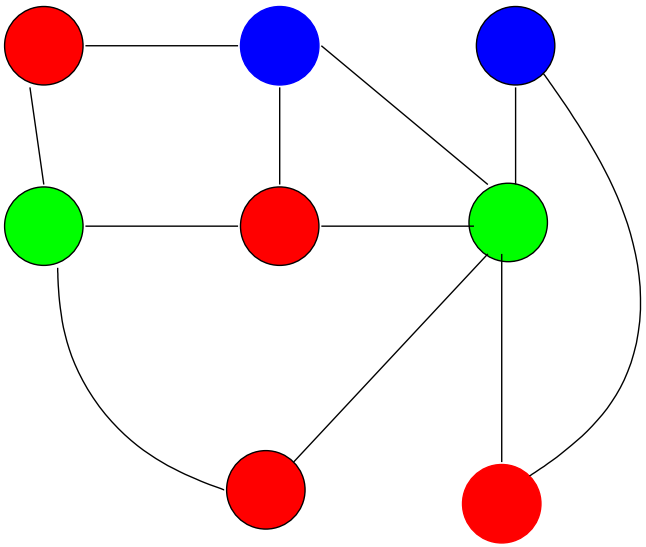
SAT / MAX - SAT

Maximiser le nombre de clauses C_j vérifiées

$$f(s) = \#\{C_j \ true\}$$

s est une solution de SAT ssi $f(s) = m$

Coloration de graphe

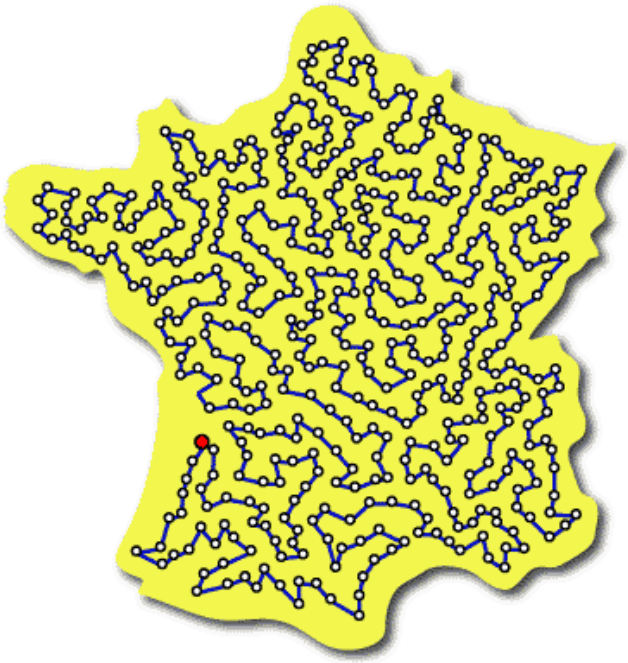


Graphe $G = (S, A)$, S ens. des sommets et A ens. des arcs

Coloration $\alpha : S \rightarrow C$ telle que si $(s, t) \in A$ alors $\alpha(s) \neq \alpha(t)$

Applications : affection de fréquence en téléphonie mobile, emploi du temps, coloration des cartes...

Voyageur de commerce (TSP)



Trouver le parcours le plus court passant par toutes les villes.

n villes

Distances d_{rs} entre les villes r et s.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{x_i x_j}$$

avec x une permutation : x_i est la ville i^{eme} traversée.

Quadratic Assignment Problem (QAP)

n objets, f_{ij} flots entre objects i et j,
n emplacements, d_{rs} distances entre emplacement r et s.

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{ij} d_{p_i p_j}$

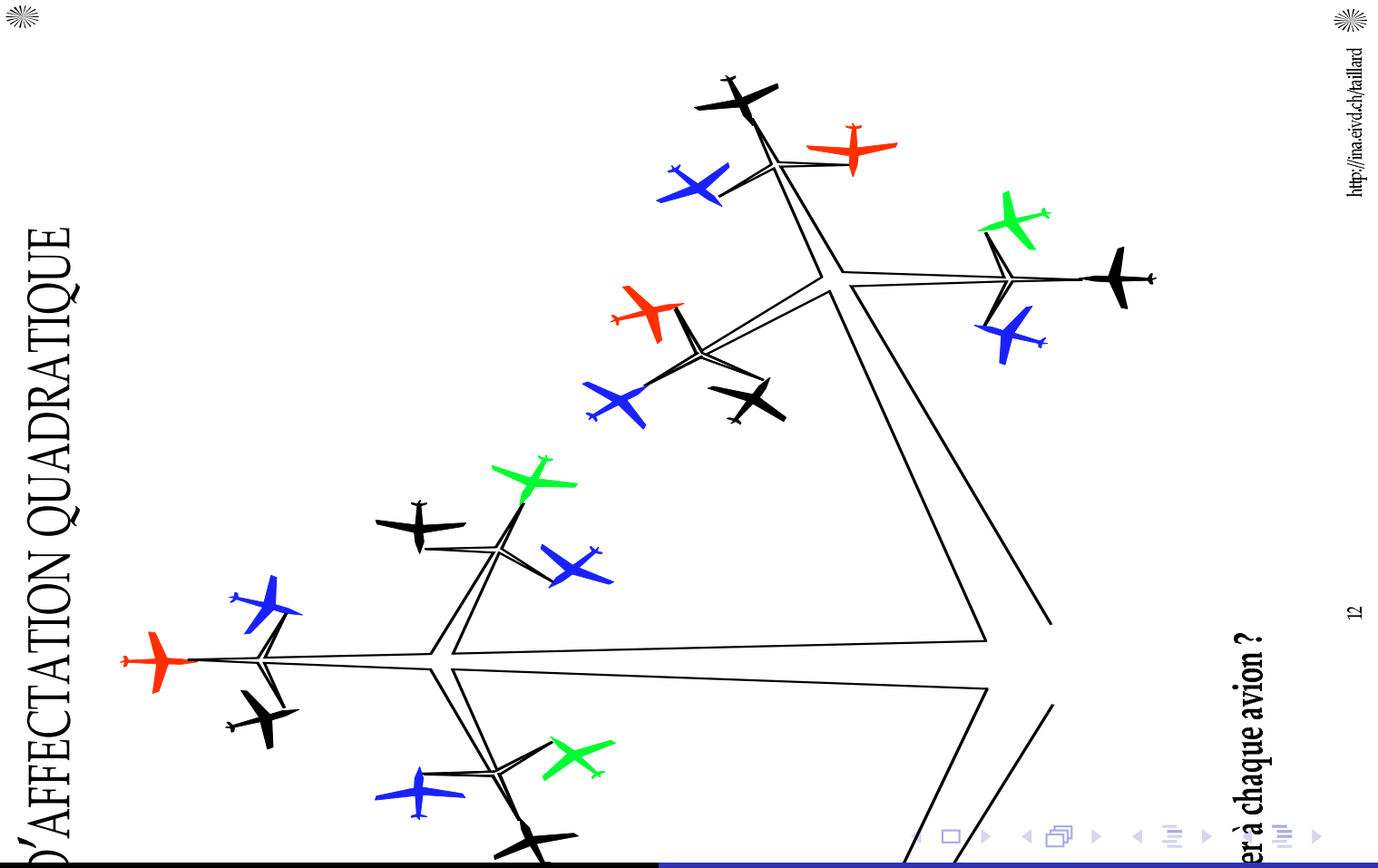
p une permutation : p_i emplacement l'objet i.

Minimiser le flot

Applications : répartition de batiments ou de servives, affectation des portes d'aéroport, placement de modules logiques, claviers...

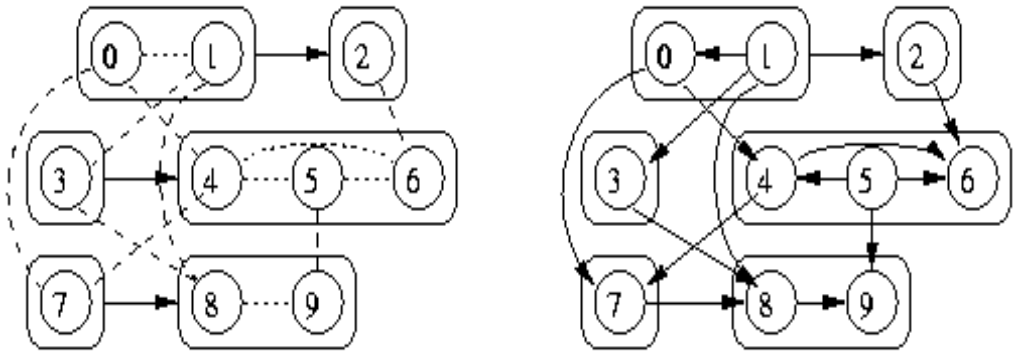
Quadratic Assignment Problem (QAP)

Exemple d'aprés Taillard.



Shop Scheduling problem

Ensemble d'opérations O,
partitioné en m sous-ens $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ (machines) et
n sous-ens $J = \{J_1, \ldots, J_n\}$ (jobs),
de plus, chaque operation $o \in O$ temps d'execution $p(o)$,
J partitionné en groupes $G = \{G1, \ldots, Gg\}$.



Paysages NK : Definition

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i; x_{i_1}, \ldots, x_{i_K})$$

- N the size of genotypes
- $K \leq N - 1$ number of epistatic link
- x a genotype of $\{0,1\}^N$
- x_k the k^{th} locus of x
- $\{i_1, \ldots, i_K\} \subset \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N\}$
- $f_i : \{0,1\}^{K+1} \rightarrow [0,1]$

Application : modélisation de réseau d'entreprises, de protéine,...

exemple $N = 4$ $K = 2$

$$x = 0110$$

$x_1 x_2 x_4$	f_1
000	0.9
001	0.6
010	0.1
011	0.2
...	...

$x_1 x_2 x_3$	f_2
000	0.4
001	0.8
010	0.3
011	0.2
...	...

$x_2 x_3 x_4$	f_3
000	0.2
...	...
101	0.9
110	0.1
111	0.5

$x_1 x_2 x_4$	f_4
000	0.1
001	0.2
010	0.8
011	0.0
...	...

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{4}(f_1(010) + f_2(011) + f_3(110) + f_4(010)) \\ &= \tfrac{1}{4}(0.1 + 0.2 + 0.1 + 0.8) \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

Retour à MAX-SAT

Comment résoudre ce genre de problèmes ?

$$(x_1 \, u x_2) n (\bar{x_2} \, u x_3) n (x_1 \, u \bar{x_3})$$

$$(x_4 \, u x_2 \, u x_3) n (x_2 \, u x_4 \, u x_5) n (\bar{x_2} \, u x_1 \, u x_5) n (\bar{x_2} \, u x_5 \, u x_4) n (x_1 \, u \bar{x_3} \, u \bar{x_4})$$

Retour à MAX-SAT

A la main... ou mathématiquement

- Exhaustivement $n = 20$, $n = 100$, ...
- Aléatoirement (croiser les doigts... fort)
- Construction de solution (pas dans ce cours)
- Méthodes exactes (pas dans ce cours)

ou ...

Heuristiques

Heuristique : algorithme de résolution basé sur l'"'expérience" ne fournissant pas nécessairement une solution optimale

On désire toutefois :

- Une complexité "raisonnable"
- Le plus souvent possible une solution proche de l'optimalité
- Le moins souvent possible un mauvaise solution (différent !)
- De la simplicité d'implémentation (code light en version de base...)

Metaheuristiques

Métaheuristique : ensemble d'heuristiques
Peu probable qu'un algorithme puisque résoudre tout problème

Métaheuristique :

- regroupe des heuristiques dépendant de paramètres
- décrive une méthode de conception d'heuristique

de
un aveu d'impuissance
à
des techniques performantes d'optimisation difficile

Metaheuristisques Classiques : recherche locale

Algorithmes à population de solutions

- Algorithmes Evolutionnaires (EA) : Holland 1975 et même avant
- Algorithmes d'essaims particulaires (PSO) : R. Ebenhart et J. Kennedy 1995.
- Algorithmes de fourmis (ACO) : Bonabeau 1999

Metaheuristisques Classiques : recherche locale

Algorithmes à solution unique

- (Recherches aléatoire),
- Algorithmes de descente : Hill-Climber (HC), première-descente
- Recuit Simulé (SA) : Kirkpatrick *et al* 1983,
- Recherche Tabou (TS) : Glover 1986 - 89 -90,

Recherche Locale (LS)

- $\mathcal{S}$ ensemble des solutions (espace de recherche),
- $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ fonction objectif à maximiser (ou coût à minimiser)
- $\mathcal{V}(s)$ ensemble des voisins de s

Recherche Locale

Choisir solution initiale $s \in \mathcal{S}$
répéter
  choisir $s' \in \mathcal{V}(s)$
  $s \leftarrow s'$
jusqu'à critère d'arrêt non verifié

Recherche Locale (LS)

Points critiques dans la conception d'une recherche locale :

- codage des solutions : redondance, introduction connaissance du problème, complexité...
- choix du voisinage : taille, continuité :
  $s' \in \mathcal{V}(s), \delta(f(s'), f(s)) \leq \epsilon$
  $\mathcal{V}(s) = \{s' \mid s' = op(s)\}$
- fonction f guide vers l'optimalité
- "choisir" un voisin

Autres : générateur aléatoire (!), choix d'implémentation (évaluation incrémentale), critère d'arrêt...

Recherche Aléatoire

Heuristique d'exploration maximale

Recherche aléatoire

Choisir solution initiale $s \in \mathcal{S}$
répéter
  choisir $s' \in \mathcal{V}(s)$ aléatoirement
  $s \leftarrow s'$
jusqu'à Nombre d'évaluations $\leq$ maxIter

Algorithme inutilisable en pratique
mais opérateur de base de métaheuristique

Hill-Climbing (HC) ou steepest-descent

Heuristique d'exploitation maximale.

Hill Climbing

Choisir solution initiale $s \in \mathcal{S}$
répéter
Choisir $s' \in \mathcal{V}(s)$ telle que $f(s')$ est maximale
$s \leftarrow s'$
jusqu'à s optimum local

Opérateur de base de métaheuristique

Une variante : first-descent

Première descente

Choisir solution initiale $s \in \mathcal{S}$
répéter
  Choisir $s' \in \mathcal{V}(s)$ aléatoirement
  si $f(s) \leq f(s')$ **alors**
    $s \leftarrow s'$
  fin si
jusqu'à s optimum local OU nombre d'évaluations $\leq$ maxIter

Recuit Simulé (SA)

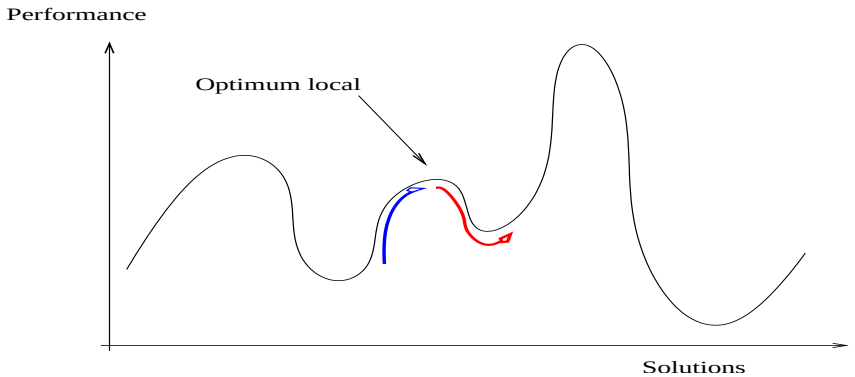
Utilisé depuis les années 80,

Metropolis (1953) simulation du refroidissement de matériaux (Thermodynamique)
Kirkpatrick *et al* (IBM 1983) utilisation pour la résolution de problème d'optimisation.

sélection d'une solution voisine suivant une probabilité
But : échapper aux optima locaux

Recuit Simulé : analogie

Système physique	Problème d'optimisation
Energie	fonction objectif
Etats du système	solution
États de basse énergie	bonne solution
Température	paramètre de contrôle



Recuit Simulé : Algorithme

Simulated Annealing

Choisir solution initiale $s \in \mathcal{S}$ et temperature initiale T

répéter

choisir aléatoirement $s' \in \mathcal{V}(s)$, $\Delta = f(s') - f(s)$

si $\Delta > 0$ **alors**

$s \leftarrow s'$

sinon

u nombre aléatoire de $[0, 1]$

si $u < e^{\frac{\Delta}{T}}$ **alors**

$s \leftarrow s'$

fin si

fin si

update temperature T

jusqu'à Critère d'arrêt vérifié

Recuit Simulé : remarques

lorsque température grande : recherche aléatoire
—–> début de la recherche
lorsque température petite : Hill-Climbing
—–> fin de la recherche
plus petite est la différence $|\Delta = f(s') - f(s)|$,
plus grande est la probabilté

Recuit Simulé : température initiale

Evaluer $\Delta_0 = f(s_0') - f(s_0)$:
Choisir aléatoirement n (grand si possible) solutions initiales s_0 et un voisin s_0'
puis calculer la moyenne de Δ_0

Température initiale T_0 de manière à obtenir $\tau_0 = e^{\frac{\Delta_0}{T_0}}$ voulu :
$\tau_0 = 0.50$ qualité "médiocre" : démarrage à haute température
$\tau_0 = 0.20$ qualité "bonne" : démarrage à basse température

Recuit Simulé : décroissance de "température"

décroissance suivant une loi géométrique $T_{k+1} = \alpha T_k$
souvent $0.8 \leq \alpha \leq 1.0$
Changement par pallier de température suivant de condition :

- $12.N$ perturbations acceptées (mouvements de solution)
- $100.N$ perturbations tentées (mouvement ou non mouvement)

où N est un paramètre qui décrit la taille du problème (nombre de villes, de variables...)

Recuit Simulé : Critère d'arrêt

Arrêt aprés 3 palliers successifs sans aucune acceptation.

Recuit Simulé : Remarques

Toutes ces indications ne sont pas universelles :
L'analyse du problème et l'expérience de concepteur permet de les adapter
Vérifier votre générateur aléatoire
La qualité du résultat doit dépendre "peu" de l'execution de l'algorithme
Premières Applications : dans le placement de circuits électroniques

Recuit Simulé : Bibliographie

E. Aarts, J. Korst : « Simulated Annealing and Boltzmann machine » John Wiley, New-York 1989

P. Siarry : « La méthode du recuit simulé : théorie et application » ESPCI - IDSET , 10 rue Vauquelin, Paris 1989

Recherche Tabou (Tabu Search)

Introduite par Glover en 1986 :
«Future paths for Integer Programming and Links to Artificial Intelligence», Computers and Operations Research, 5 :533-549, 1986.
Introduction d'une notion de mémoire dans la stratégie d'exploration
Recherche tabou : Interdiction de reprendre des solutions déjà (récemment) rencontrées

Recherche Tabou (Tabu Search)

Tabu Search

Choisir solution initiale $s \in \mathcal{S}$, initialise Tabou M

répéter

choisir $s' \in \mathcal{V}(s)$ telle que

Critère d'aspiration vérifié OU

s' non tabou ET $f(s')$ meilleure solution de $\mathcal{V}(s)$

$s \leftarrow s'$

update Tabou M

jusqu'à Critère d'arrêt vérifié

Recherche Tabou : Critère d'aspiration

Enlever le caractère tabou d'une solution :
Lorsque la solution est la meilleure jamais rencontrée

Recherche Tabou : mémoire des tabous

Les tabous sont souvent des mouvements tabous pendant une durée.
exemple : problème maxsat avec $n = 6$
$M = (0, 3, 0, 0, 0, 0)$: le deuxième bit ne peut être modifié pendant 3 itérations.
Aprés quelques itérations : $M = (1, 2, 0, 0, 2, 5)$: seuls bits non tabou 3 et 4
Lorsqu'un mouvement est effectué : interdiction pendant n itérations
Si n trop faible, tabou peu efficasse
Si n trop grand, les solutions sont "à flanc de coteau".
–> Stratégie de diversification

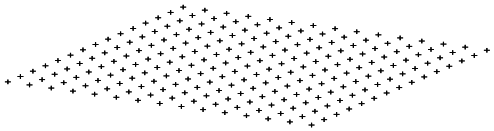
Recherche Tabou : Mémoire à long terme

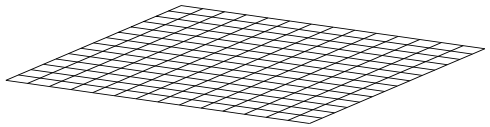
Statistique sur les mouvements :
Repérer les mouvements trop utilsés (difficulté de recherche, optimum local...)
fréquence $freq(m)$ d'utilisation d'un mouvement m :
pénalisation du mouvement m par ajout d'interdiction en fonction de $freq(m)$.

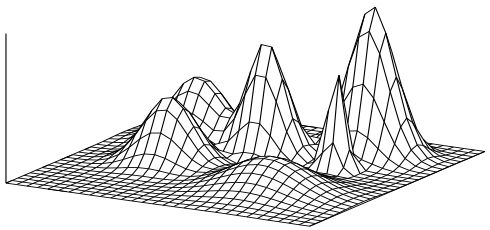
Recherche Tabou : Bibliographie

Glover *et al* : «Tabu Search» Kluwer Academic Publishers, 1997

Paysage Adaptatif



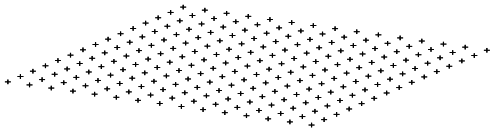


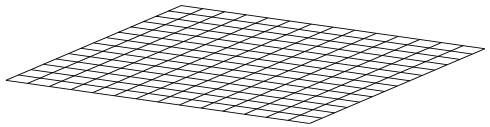


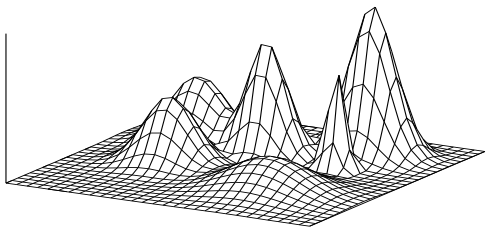
Origine Biologique (Wright 1930) : Modélisation évolution des espèces

Utiliser pour modéliser des systèmes dynamiques : physique statistique, évolution moléculaire, écologie, etc

Optimisation combinatoire







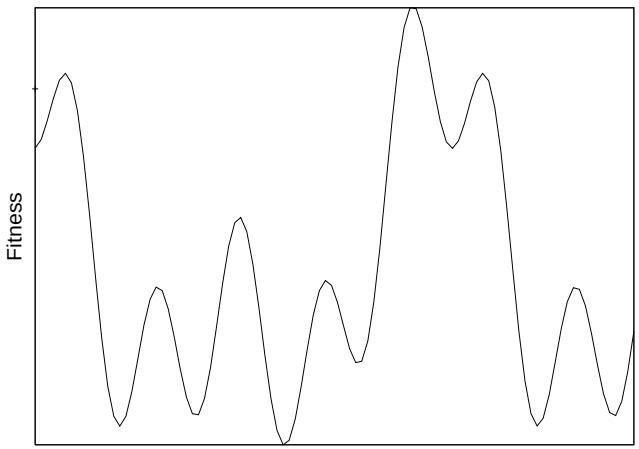
Paysage adaptatif $(\mathcal{S}, \mathcal{V}, f)$:

- $\mathcal{S}$: ensemble de solutions potentielles,
- $\mathcal{V} : \mathcal{S} \rightarrow 2^{\mathcal{S}}$: relation de voisinage,
  - $\mathcal{V}(x) = \{y \mid y = op(x)\}$
  - $\mathcal{V}(x) = \{y \mid d(y,x) \leq 1\}$
- $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$: fonction à optimiser.

Intérêts du concept

- Relation entre description géométrique d'un problème et dynamique de recherche
- Pertinence du choix de l'opérateur
- Connaissance de la géométrie du problème
  $\Rightarrow$ conception de métaheuristiques adaptées

Paysage Multimodal



paysage multimodal

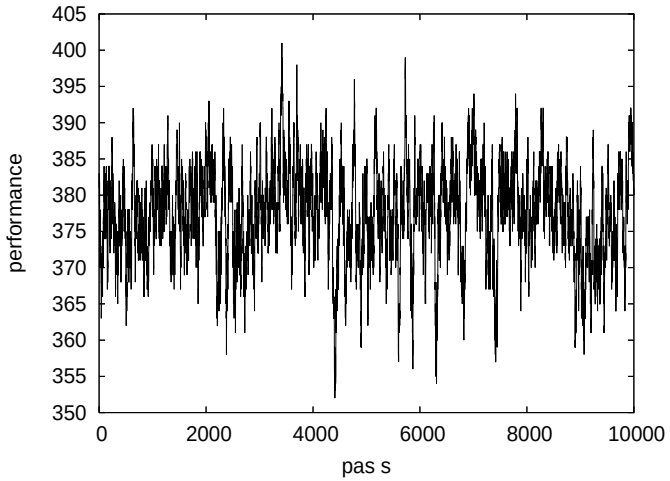
Optimum local : aucune solution voisine de meilleure performance.

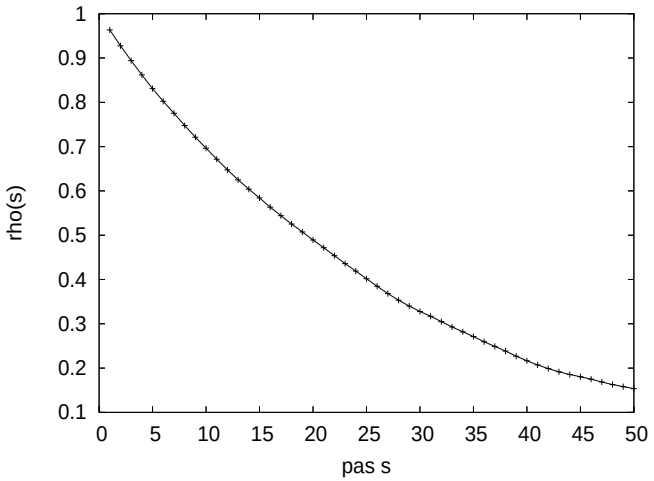
- Difficulté liée au nombre
- Taille des bassins d'attraction

Estimation : Marche adaptative $(s_0, s_1, \ldots)$ où $s_{i+1} \in \mathcal{V}(s_i)$ $f(s_i) < f(s_{i+1})$

- Terminaison sur optimum local
- Longueur : indice de distance inter-optima

Paysage Rugueux

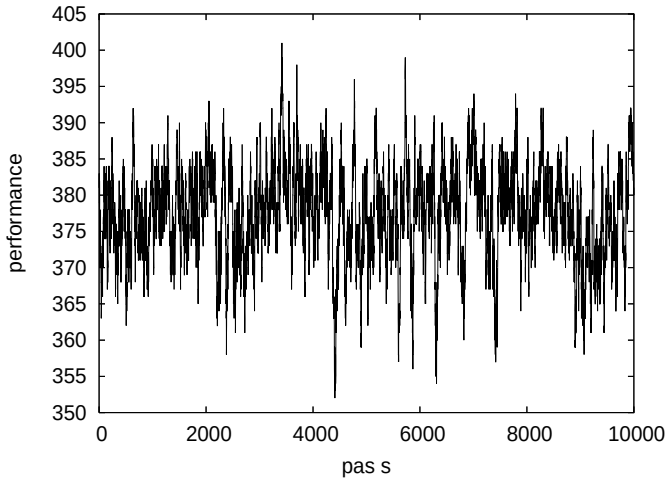


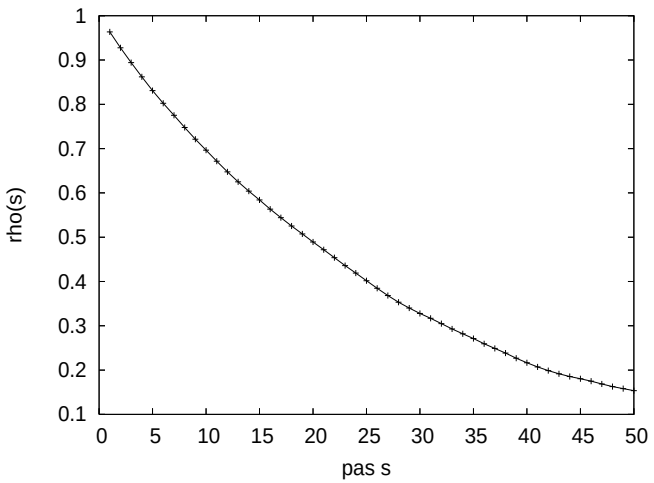


Autocorrélation lors d'une marche aléatoire (Weinberger 1996)
Longueur de corrélation $\tau = \frac{1}{\rho(1)}$

- τ petit : paysage rugueux
- τ grand : paysage lisse

Paysage Rugueux





Autocorrélation lors d'une marche aléatoire (Weinberger 1996)
Longueur de corrélation $\tau = \frac{1}{\rho(1)}$

- τ petit : paysage rugueux
- τ grand : paysage lisse

conjecture
(Stadler 92, Garcia 97) :

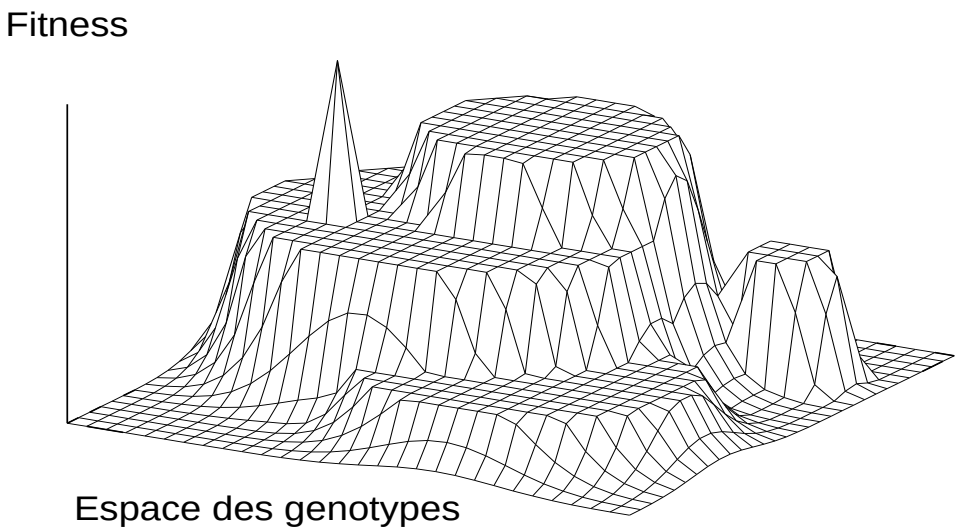
$$M \approx |\mathcal{S}|/|\mathcal{B}(x,\tau)|$$

Paysage Neutre

Théorie de la neutralité (Kimura $\approx$ 1960)

Théorie de la mutation et de la dérive aléatoire

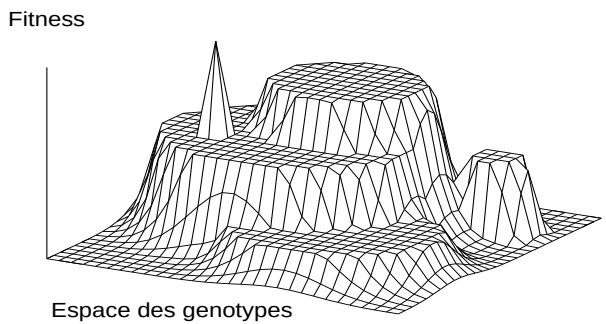
Rôle prépondérant des mutations sans influence sur la performance



- Géométrie de plateaux
- Degré de neutralité
- Réseaux de neutralité (Schuster 1994, structure secondaire de l'ARN)

Paysage Neutre
Évolution artificielle

Prise en compte depuis les années 80 en évolution artificielle : redondance (Goldberg 87)



Présence dans :

- Programmation génétique
- Contrôleur de robot
- Conception de circuit (Cartesian GP)
- Étiquetage de graphe (MinLA)

Paysage neutre
Optimisation combinatoire

Plusieurs possibilités :

- Diminuer la neutralité :
  conjecture : redondance nuit aux performances
- Utiliser une métaheuristique adaptée :
  conjecture : neutralité est intrisèque
- Augmenter la neutralité par un choix de codage redondant :
  conjecture : éviter les optima locaux

Paysage neutre
Optimisation combinatoire

Plusieurs possibilités :

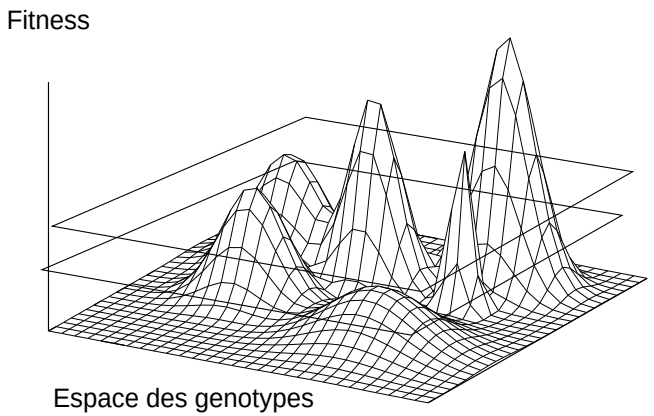
- Diminuer la neutralité :
  conjecture : redondance nuit aux performances
- Utiliser une métaheuristique adaptée :
  conjecture : neutralité est intrisèque
- Augmenter la neutralité par un choix de codage redondant :
  conjecture : éviter les optima locaux

Meilleure description et connaissance des paysages neutres

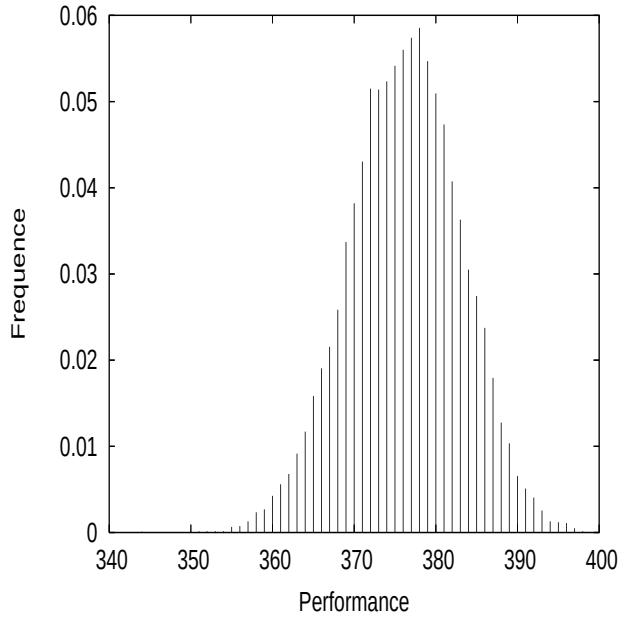
$\longrightarrow$ Concevoir de nouvelles métaheuristiques

$\longrightarrow$ Évaluer la pertinence d'un codage

Ensemble de neutralité



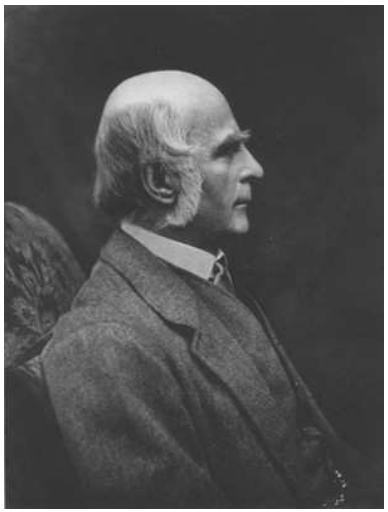
Ensemble des solutions de même performance



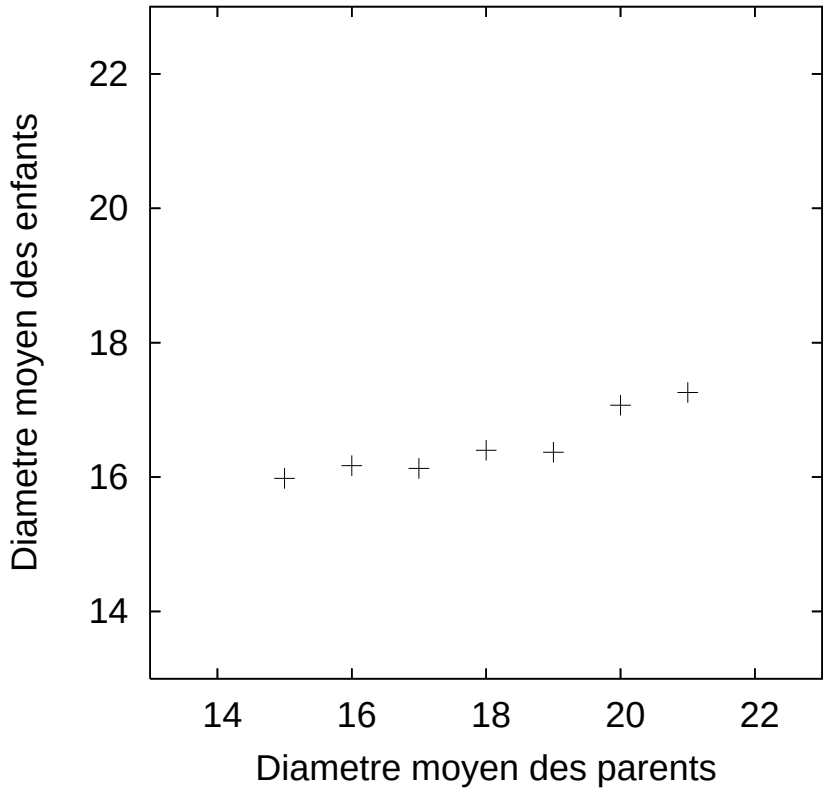
Densité des états (D.O.S.)

- Introduite en physique (Rosé 1996)
- Optimisation (Belaidouni, J.K. Hao 2000)

Détour par Sir F. Galton

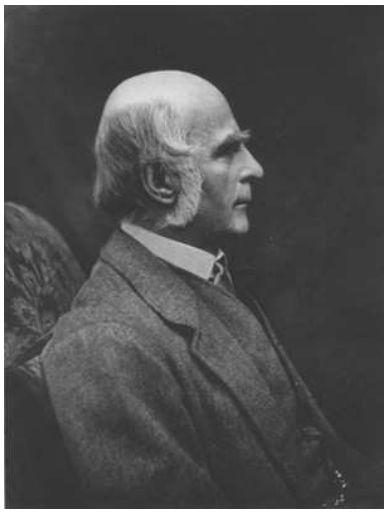


(1822 - 1911)

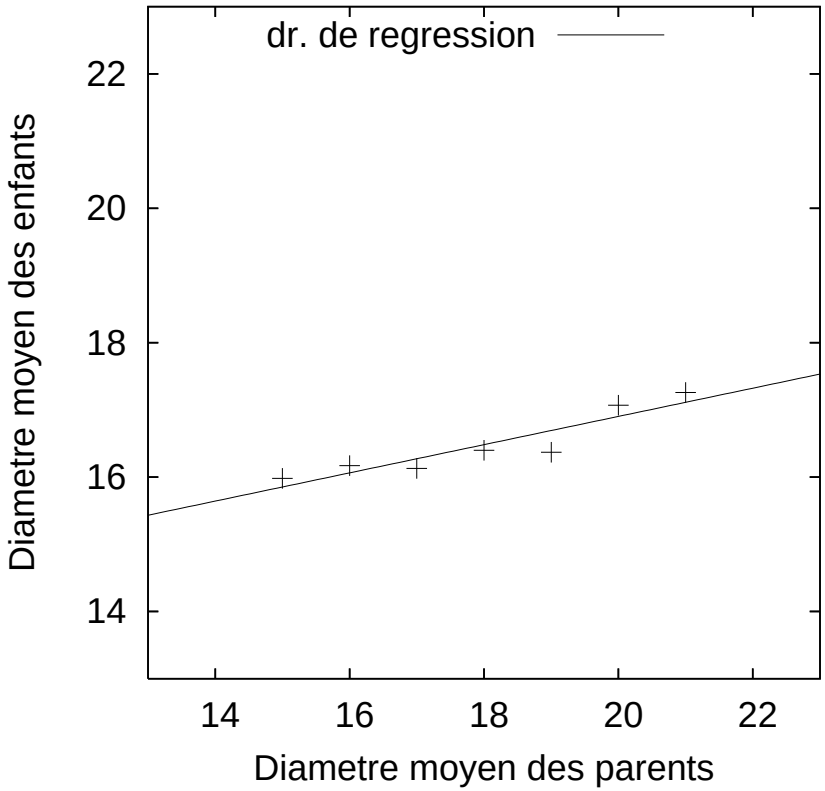


Données originales de Galton sur la taille des pois de senteur (1877)

Détour par Sir F. Galton

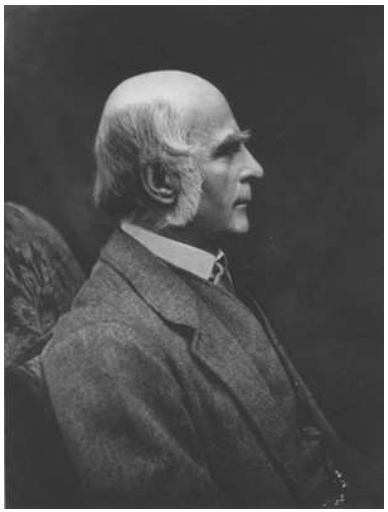


(1822 - 1911)

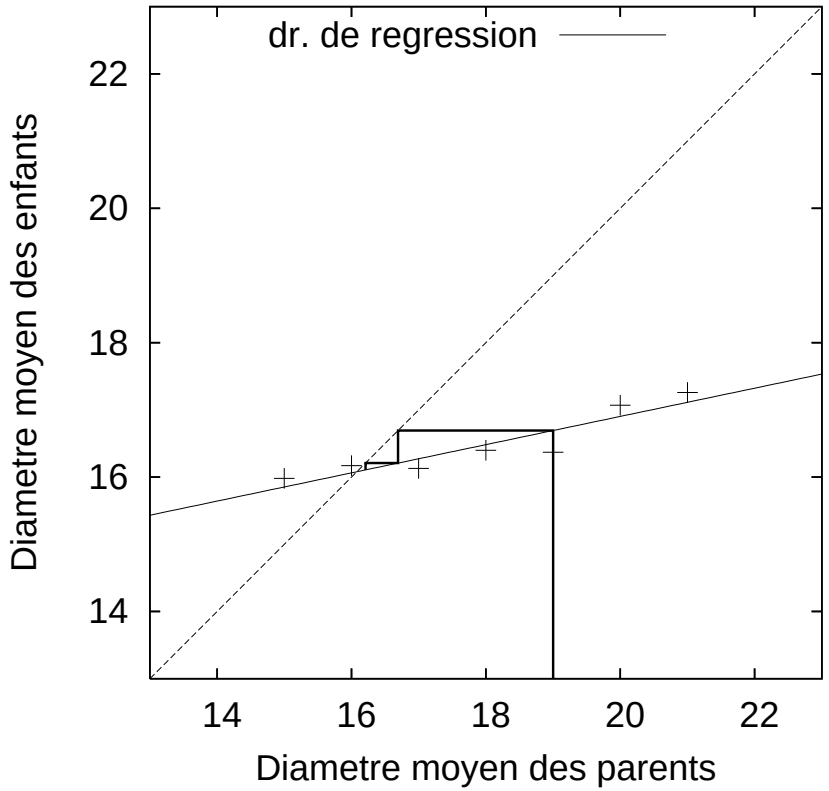


Données originales de Galton sur la taille des pois de senteur (1877)

Détour par Sir F. Galton

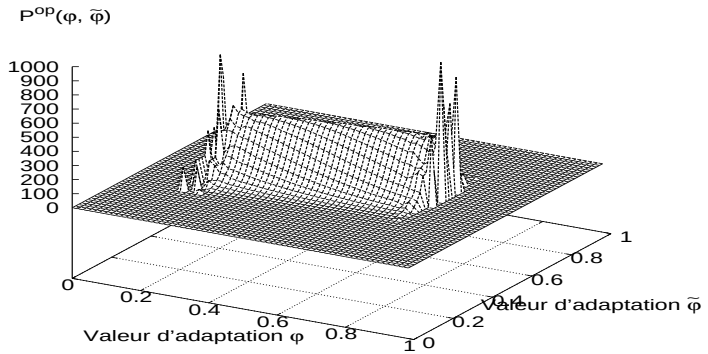


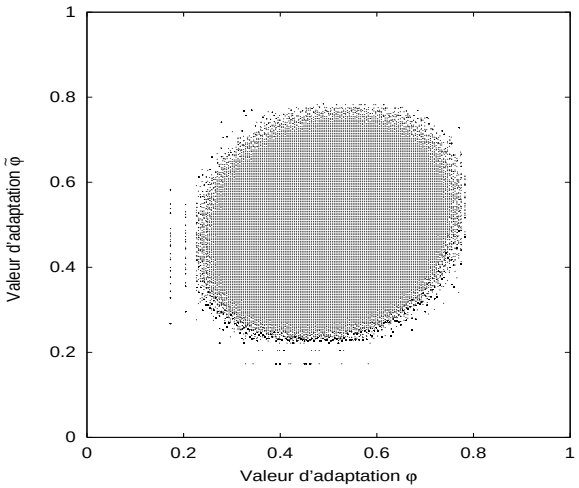
(1822 - 1911)



Données originales de Galton sur la taille des pois de senteur (1877)

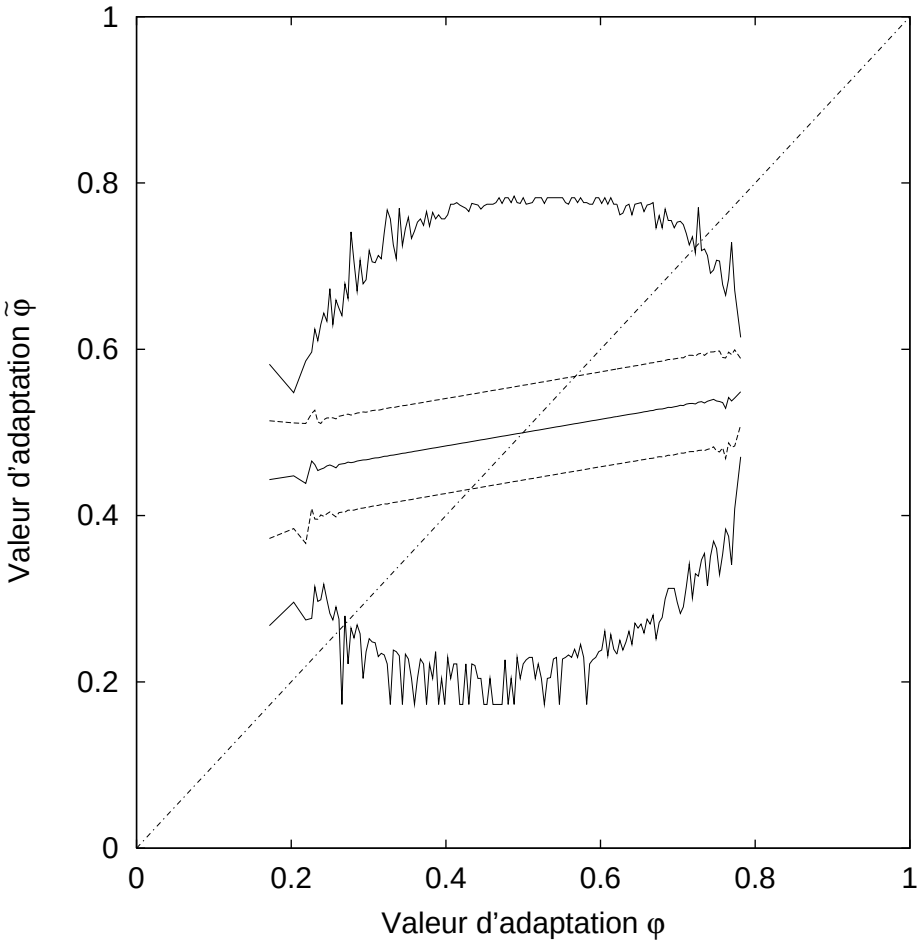
Nuage adaptatif
Optimisation combinatoire





$X(s) = f(s)$, $Y(s) = f(op(s))$,
nuage adaptatif relatif à l'opérateur *op* :
densité de probabilité conditionnelle bivariée de Y sachant X

Nuage adaptatif
Statistiques



- Probabilité d'améliorer
- Moyenne des performances améliorants
- Moyenne et écart-type des performances

Paysages embarqués

Heckendorm 2002 :
"beaucoup de petits sous-problèmes interagissent les uns avec les autres de manière à construire un problème plus complexe"

- $\mathcal{S}$ ensemble des chaînes binaires de longueur N
- $\mathcal{V}$ voisinage de Hamming
- $f(s) = \sum_{j=1}^{P} f_j(pack_j(s, m_j))$

$\rightsquigarrow$ Généralisation des paysages de référence NK et MAX-SAT

Exemple Paysage embarqué $N = 4$ $P = 5$

$$s = 0110$$

$s_1 s_2 s_4$	f_1
000	2
001	0
010	1
011	2
...	...

$s_2 s_3$	f_2
00	1
01	1
10	2
11	2

$s_2 s_3 s_4$	f_3
000	0
...	...
101	0
110	1
111	2

$s_1 s_2 s_4$	f_4
000	1
001	2
010	0
011	0
...	...

$s_1 s_2 s_4$	f_5
000	1
001	2
010	0
011	0
...	...

$$\begin{aligned} f(s) &= f_1(010) + f_2(11) + f_3(110) + f_4(010) + f_5(010) \\ &= 1 + 2 + 1 + 0 + 0 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Paysages embarqués uniformes

$s_1\, s_2\, s_4$	f_1
000	$X_1(000)$
001	$X_1(001)$
010	$X_1(010)$
011	$X_1(011)$
...	...

$s_4\, s_5$	f_2
00	$X_2(00)$
01	$X_2(01)$
10	$X_2(10)$
11	$X_2(11)$

- $X_j(s)$ même loi que la v.a. X
- $\forall s, s'\ \forall i \neq j\ X_i(s)$ et $X_j(s')$ indépendantes
- $\forall s, s'\ X_j(s)$ et $X_j(s')$ corrélation ρ

Paysages NK

Introduit par Kauffman 1993

But : étudier la relation entre épistasie (K) et rugosité

$s_1 s_2 s_4$	f_1
000	0.23
001	0.41
010	0.11
011	0.78
...	...

$s_1 s_2 s_3$	f_2
000	0.71
001	0.11
010	0.23
011	0.81
...	...

$s_2 s_3 s_4$	f_3
000	0.34
...	...
101	0.72
110	0.61
111	0.98

$s_1 s_2 s_4$	f_4
000	0.56
001	0.12
010	0.91
011	0.19
...	...

$$P = N$$

MAX-k-SAT

Performance : Nombre maximum de clauses vérifiées en cnf

$$(s_4 \vee s_2 \vee s_3) \wedge (s_2 \vee s_4 \vee s_5) \wedge (\bar{s_2} \vee s_1 \vee s_5) \wedge (\bar{s_2} \vee s_5 \vee s_4) \wedge (s_1 \vee \bar{s_3} \vee \bar{s_4})$$

$s_4\, s_2\, s_3$	f_1
000	0
001	1
010	1
011	1
...	.

$s_2\, s_4\, s_5$	f_2
000	0
001	1
010	1
011	1
...	.

$s_2\, s_1\, s_5$	f_3
000	1
...	.
101	1
110	1
111	1

$s_2\, s_5\, s_4$	f_4
000	1
001	1
010	1
011	0
...	.

$s_1\, s_3\, s_4$	f_5
000	1
001	1
010	1
011	1
...	.

P le nombre de clauses
k variables par clause

Opérateur de recherche aléatoire (d bits)

opérateur standard en AE, SA,...

Opérateur de recherche aléatoire (d bits)

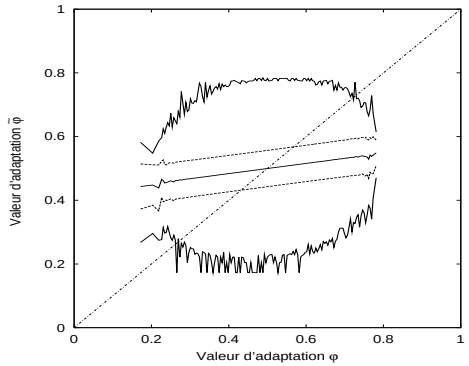
opérateur standard en AE, SA,...

- Nuage adaptatif : Somme de densités gaussiennes

Opérateur de recherche aléatoire (d bits)

opérateur standard en AE, SA,...

- Nuage adaptatif : Somme de densités gaussiennes



- Équation de la courbe moyenne :

$$\tilde{\varphi} = P.E(X) + (1 - C^d)(\varphi - P.E(X))$$

où $C^d = \frac{E(\gamma^d)}{P}(1-\rho)$ où $E(\gamma^d)$ est l'espérance de γ^d.
$\gamma^d(n)$ prob. que n fonctions embarquées soient modifiées par op^d.

- Confirmés expérimentalement sur NK et Max-k-SAT.

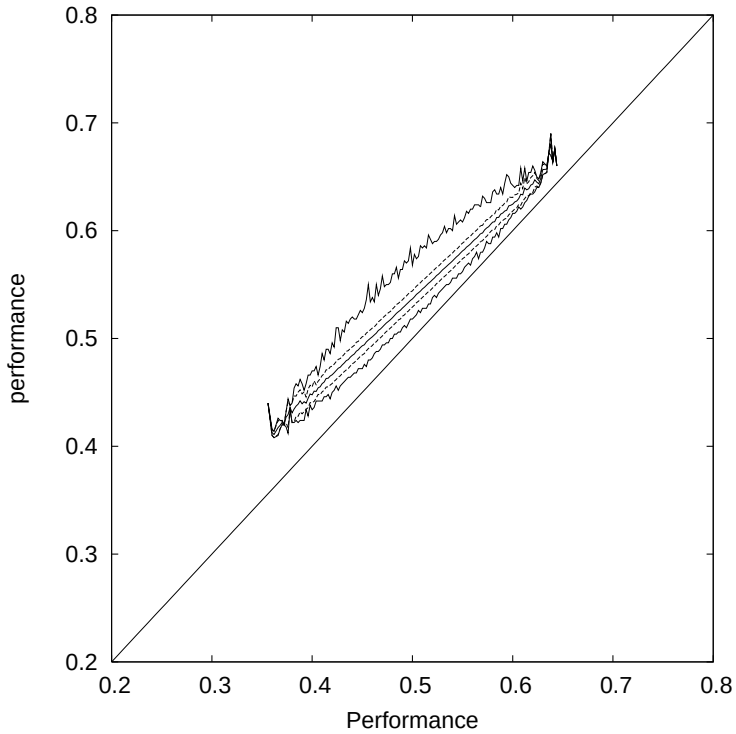
Opérateurs HC et SA

Pas d'expression analytique "simple" du NA

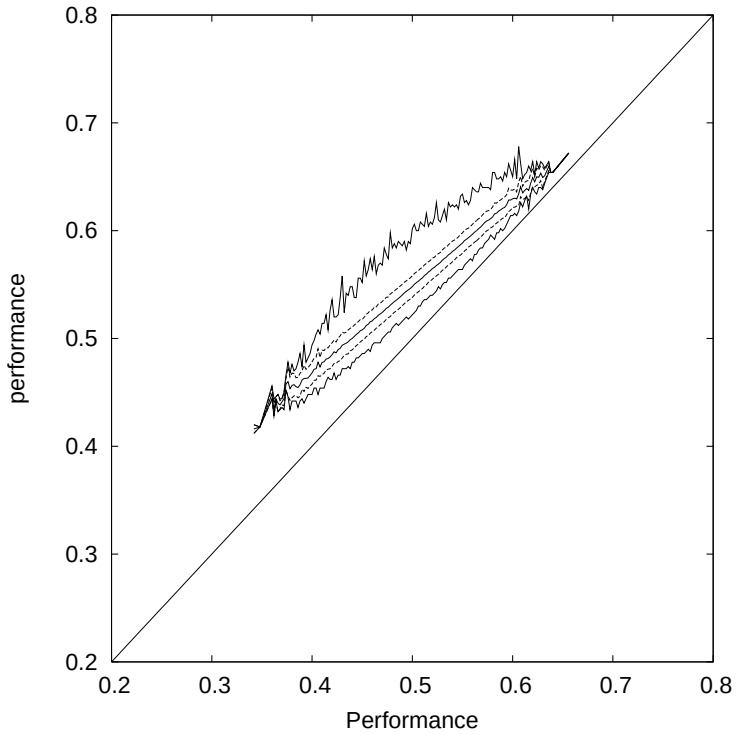
Étude expérimentale de :

- Courbe moyenne
- Dynamique de l'opérateur

Opérateurs HC et SA



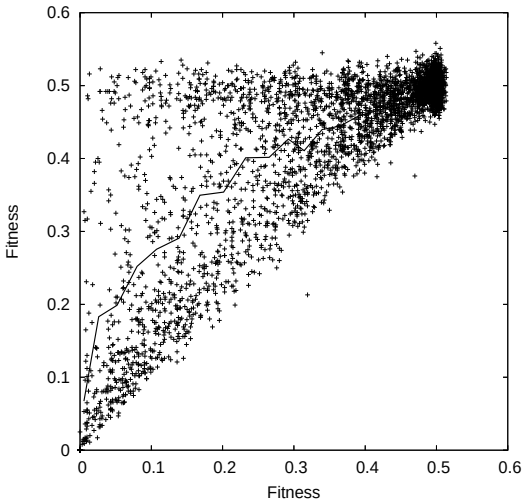
$N = 64,\ K = 5$



$N = 64,\ K = 10$

Opérateur HC sur les paysages NK

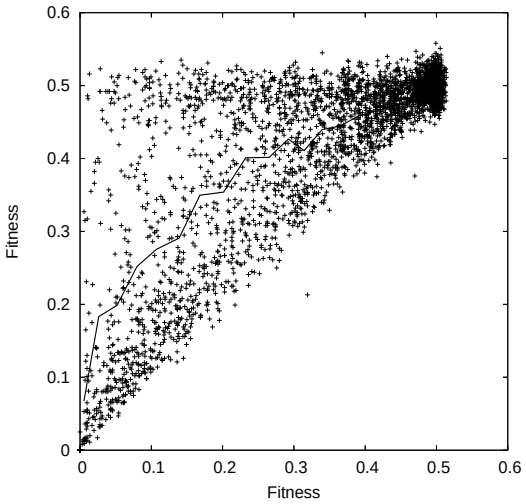
Coefficient de Pente Négative



Nuage adaptatif particulier :

- Échantillonnage Métropolis-Hasting
- Opérateur : tournoi de taille t
- Partitionnement en m segments (simple ou bissection)

Coefficient de Pente Négative



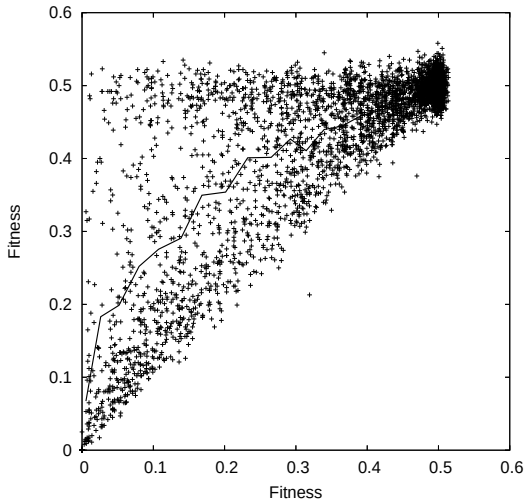
Nuage adaptatif particulier :

- Échantillonnage Métropolis-Hasting
- Opérateur : tournoi de taille t
- Partitionnement en m segments (simple ou bissection)

Coefficient de Pente Négative :

$$CPN = \sum_{i=1}^{m-1} \min(P_i, 0)$$

Coefficient de Pente Négative



Problèmes GP :

- Problème de parité paire
- Problème binômial-3
- Fourmi Sante-Fe

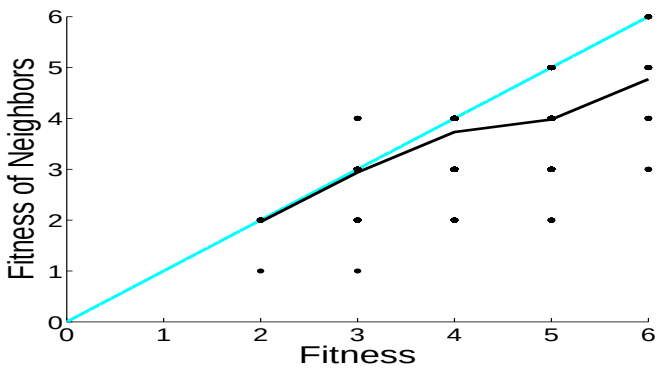
Nuage adaptatif particulier :

- Échantillonnage Métropolis-Hasting
- Opérateur : tournoi de taille t
- Partitionnement en m segments (simple ou bissection)

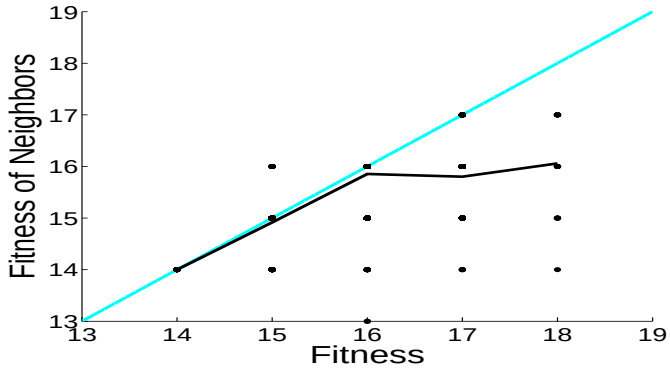
Coefficient de Pente Négative :

$$CPN = \sum_{i=1}^{m-1} \min(P_i, 0)$$

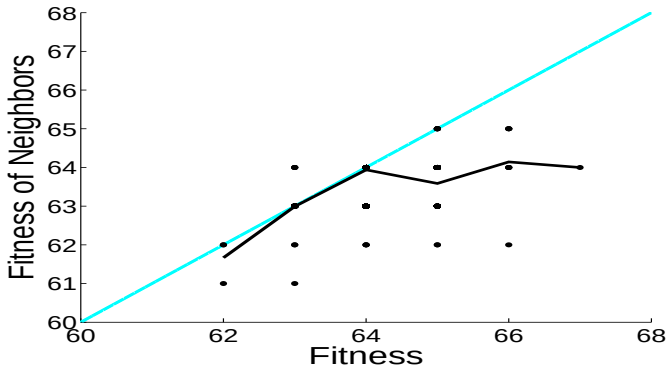
Problème de parité paire



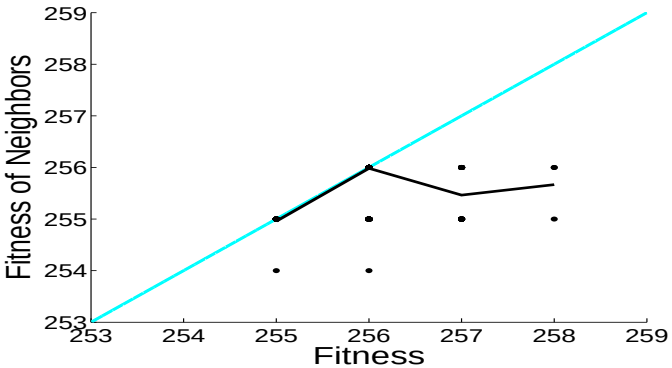
$k = 3$ $CPN = 0.0$



$k = 5$ $CPN = -0.11$

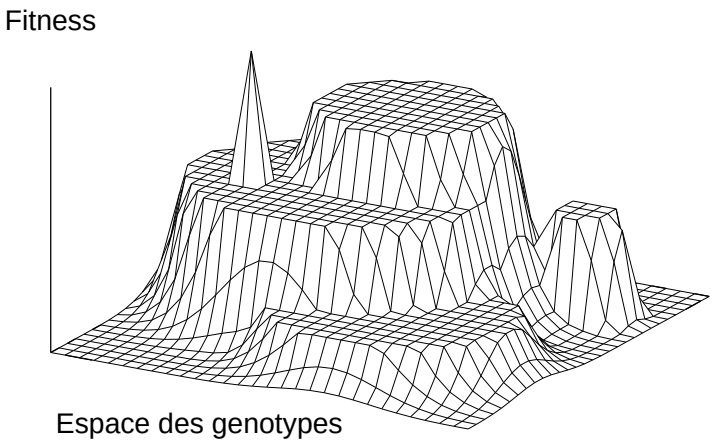


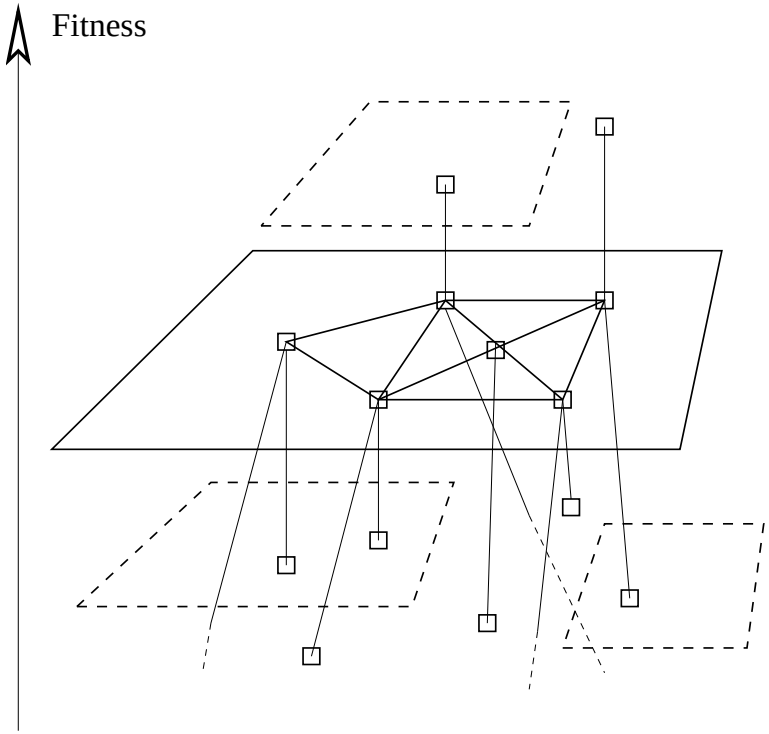
$k = 7$ $CPN = -0.49$



$k = 9$ $CPN = -0.55$

Réseaux de neutralité (Schuster 1994)





Définitions

- Test de neutralité : $isNeutral : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \{vrai, faux\}$
- Voisinage neutre de s :
  $N_{neut}(s) = \{s' \in \mathcal{V}(s) \mid isNeutral(s, s')\}$
- Degré de neutralité de s : $nDeg(s) = \sharp(N_{neut}(s) - \{s\})$.
- Marche neutre : $(s_0, s_1, \ldots, s_m)$, $\forall i, j$ $isNeutral(s_i, s_j)$ est $vrai$.
- Réseau de neutralité (RN) de s : graphe (G, N)
  arcs N : relation voisinage neutre,
  sommets G : $s' \in \mathcal{S}$, $\exists$ une marche neutre appartenant à G de s à s'.

Mesures Intra Réseau

Mesures classiques de graphes pour décrire les RN :

1. La *taille* : nombre de sommets du réseau,
2. Distribution des degrés de neutralité :
   mesure la quantité de "neutralité"
3. Autocorrélation des degrés de neutralité au cours d'une marche neutre (Bastolla 2004, évo. mol.) :
   comparaison au graphe aléatoire,
   mesure la structure de corrélation d'un *RN*

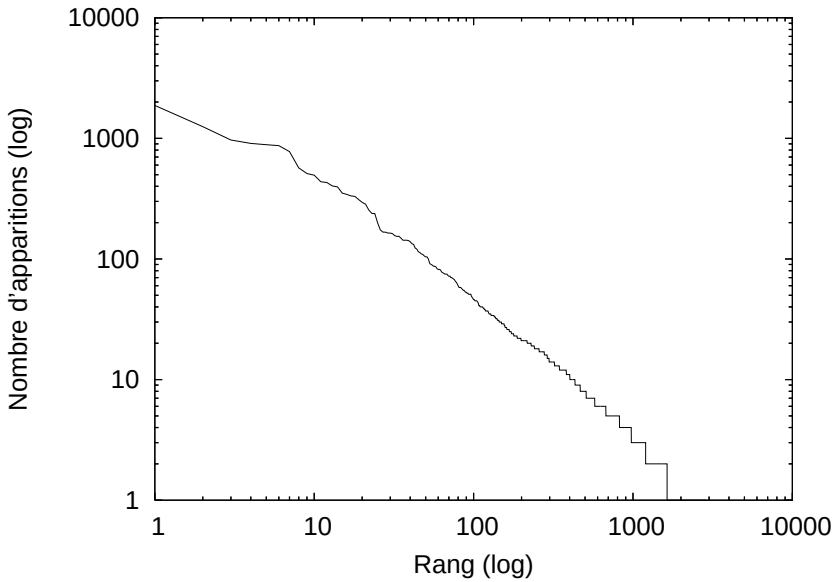
Mesures Intra Réseau

Taille

Mesures classiques de graphes pour décrire les RN :

1. La *taille* : nombre de sommets du réseau,

Profil rang-taille en log-log :



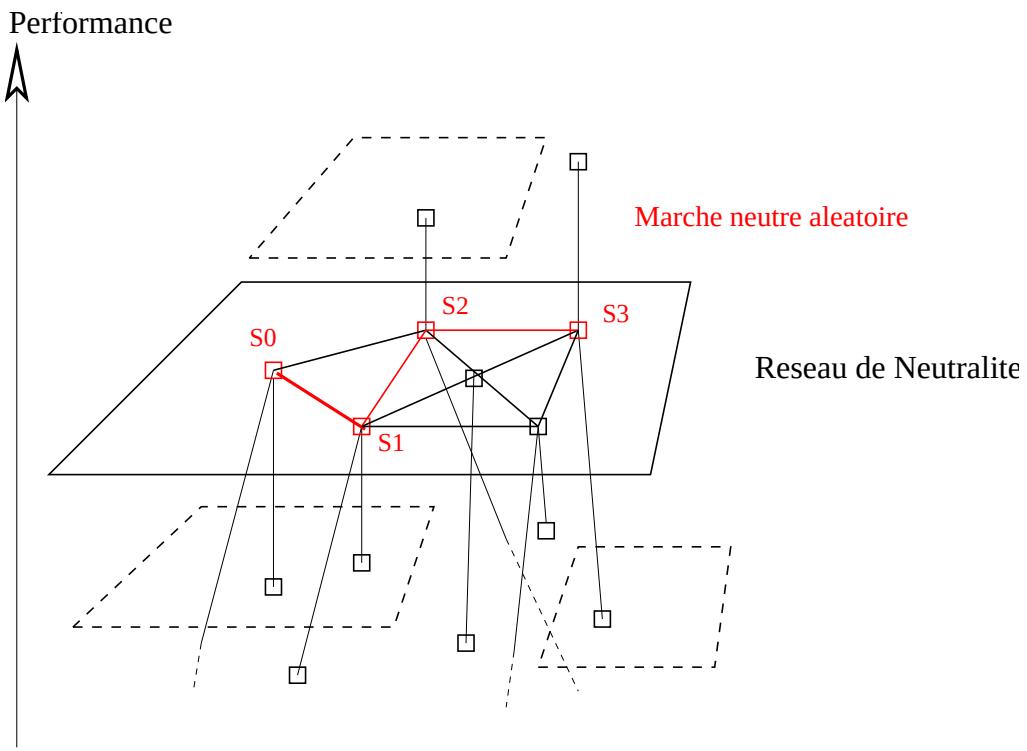
Fréquence d'apparition d'un mot dans un texte (Ziff 1960)

Mesures Intra Réseau

Mesures classiques de graphes pour décrire les RN :

1. La *taille* : nombre de sommets du réseau,
2. Distribution des degrés de neutralité :
   mesure la quantité de "neutralité"
3. Autocorrélation des degrés de neutralité au cours d'une marche neutre (Bastolla 2004, évo. mol.) :
   comparaison au graphe aléatoire,
   mesure la structure de corrélation d'un *RN*

Mesures Inter Réseaux



1. Taux d'innovation (Huynen 1996) : Nombre de nouvelles valeurs de performance atteignables dans le voisinage
2. Autocorrélation de l'évolvabilité : autocorrélation de la série $(evol(s_0), evol(s_1), \ldots)$.

Variantes des paysages NK

NK

$$f(s) = \frac{1}{N} \quad (\quad 0.02 \quad + \quad 0.31 \quad + \quad 0.91 \quad + \ldots + \quad 0.20 \quad)$$

NK_q (Newmann *et al* 1998)

$$f(s) = \frac{1}{N(q-1)} \quad (\quad 1 \quad + \quad 3 \quad + \quad 3 \quad + \ldots + \quad 0 \quad)$$

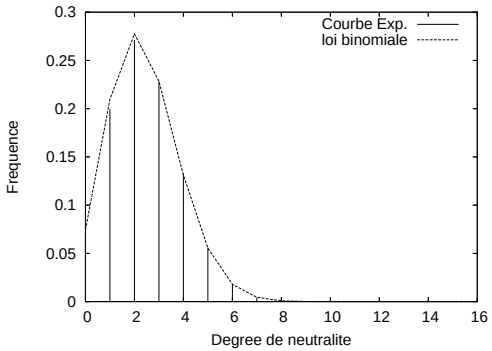
NK_M (Lobo 2004)

$$f(s) = \frac{1}{N.M} E[M. \quad (\quad 0.02 \quad + \quad 0.31 \quad + \quad 0.91 \quad + \ldots + \quad 0.20 \quad)]$$

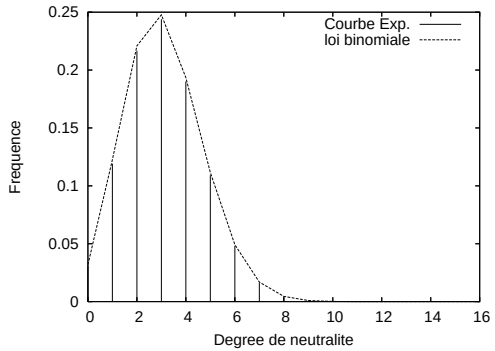
NK_p (Barnett 1998)

$$f(s) = \frac{1}{N} \quad (\quad 0.02 \quad + \quad 0.31 \quad + \quad 0 \quad + \ldots + \quad 0.20 \quad)$$

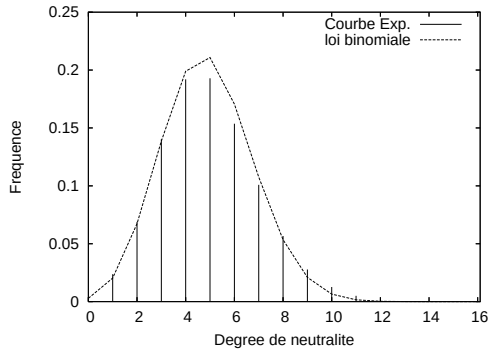
Distribution des degrés de neutralité ($N = 16$, $K = 2$)



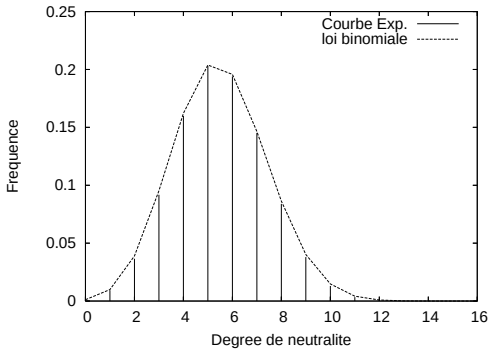
$q = 4$



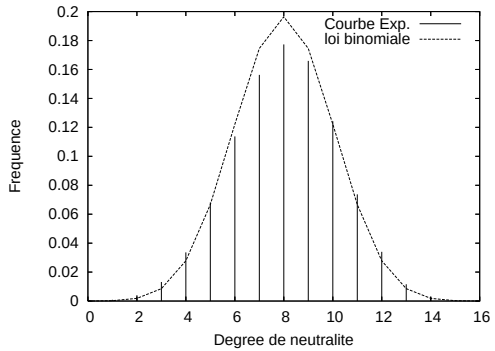
$M = 48$



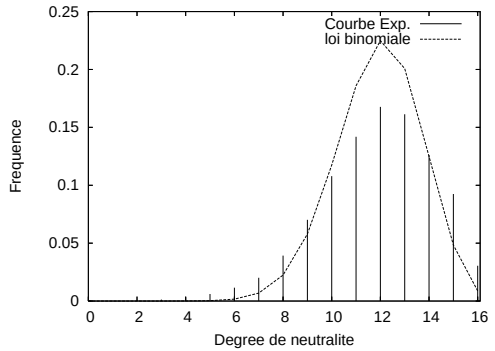
$p = 0.8$



$q = 2$



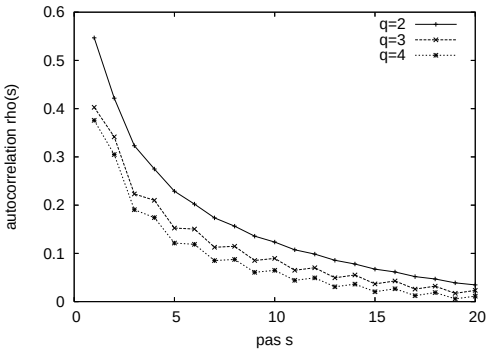
$M = 16$

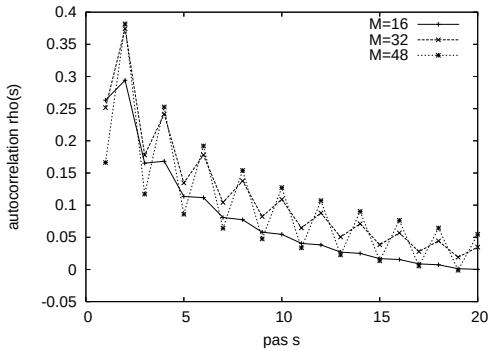


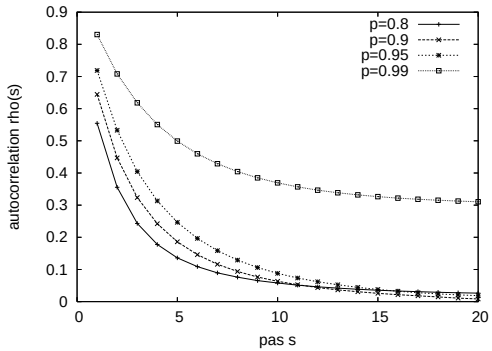
$p = 0.95$

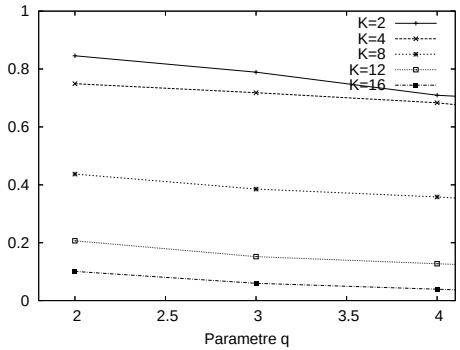
Distribution exp. (bâton), distribution binômiale (ligne).

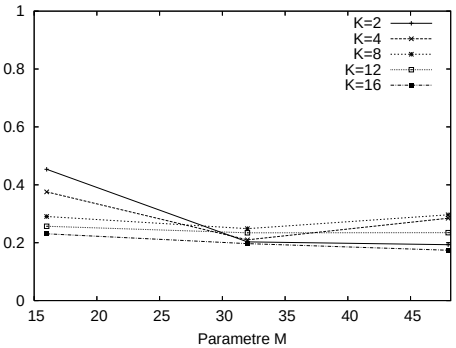
Autocorrélation des degrés

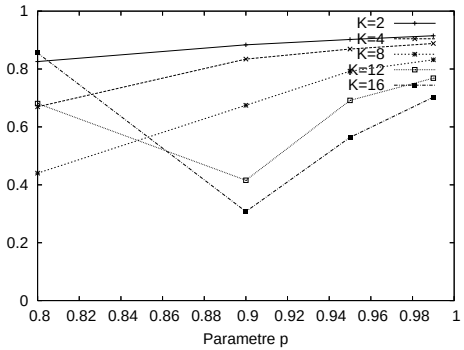








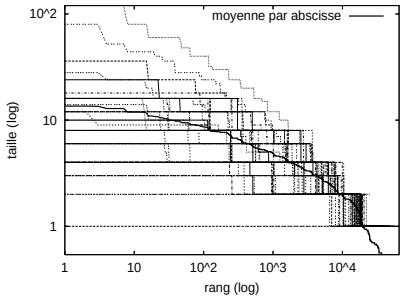




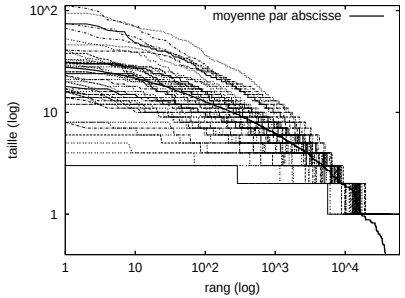
paysages NK_q paysages NK_M paysages NK_p

Coefficient d'autocorrélation d'ordre 1

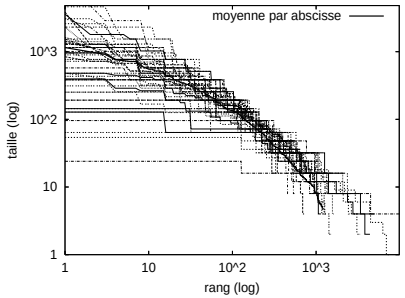
Taille des Réseaux



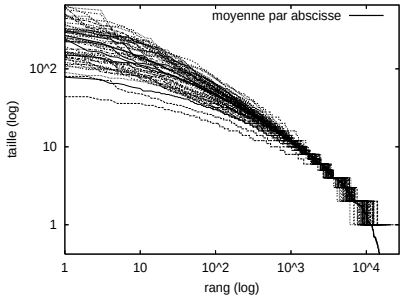
$K = 1$ $q = 10$



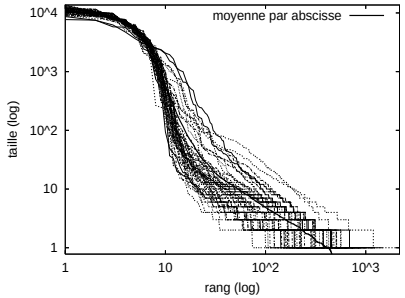
$K = 1$ $M = 160$



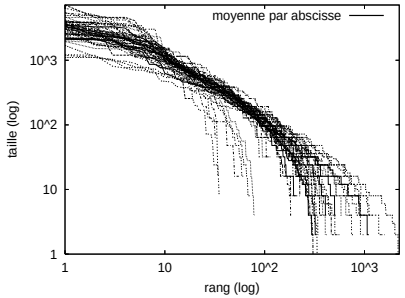
$K = 1$ $p = 0.8$



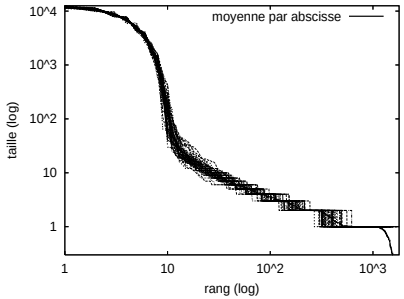
$K = 2$ $q = 4$



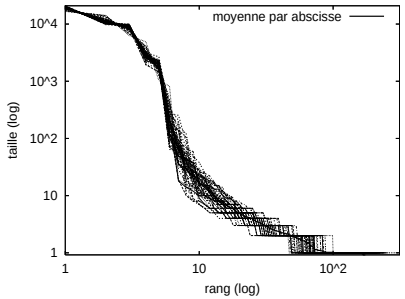
$K = 2$ $M = 32$



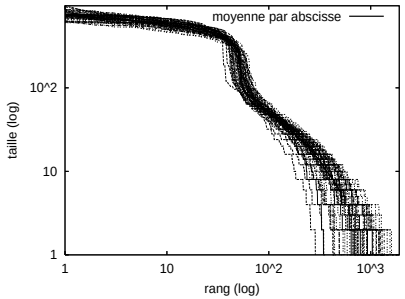
$K = 2$ $p = 0.9$



$K = 5$ $q = 2$

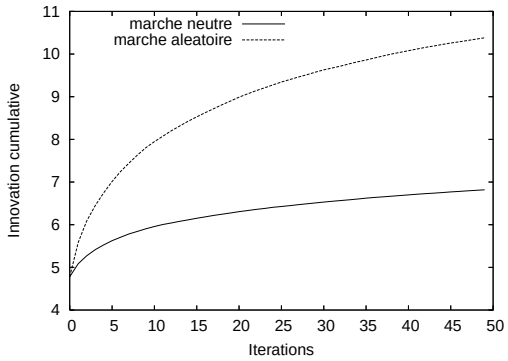


$K = 5$ $M = 16$

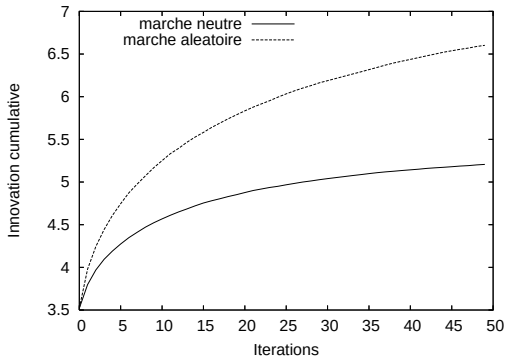


$K = 5$ $p = 0.95$

Taux d'innovation



NK_q $(K = 2\ q = 2)$

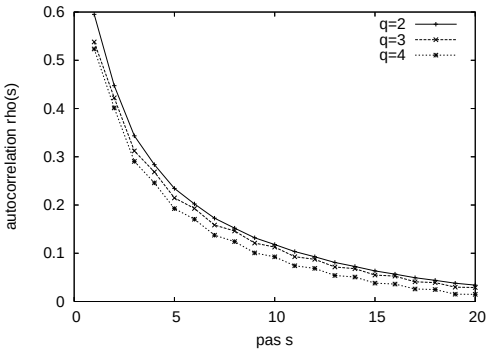


NK_M $(K = 2\ M = 16)$

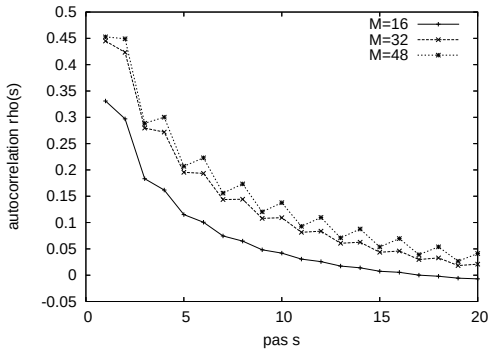
- Fonctions puissances : $k.t^a$
- Peu de différence entre les variantes.
- Les taux augmentent avec l'épistasie (K) et la neutralité (dans une moindre mesure)

Autocorrélation de l'évolvabilité maximale

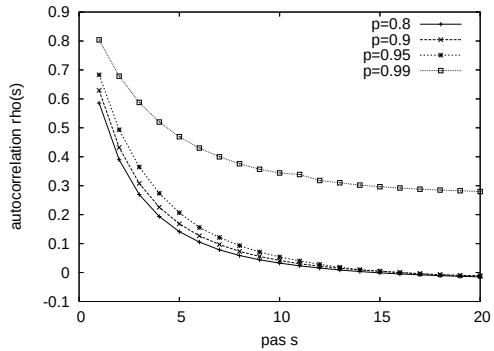
Exemple de fonction d'autocorrélation pour $N = 16$, $K = 2$



NK_q

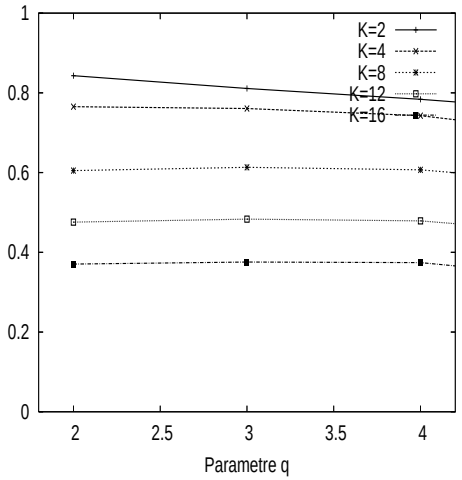


NK_M

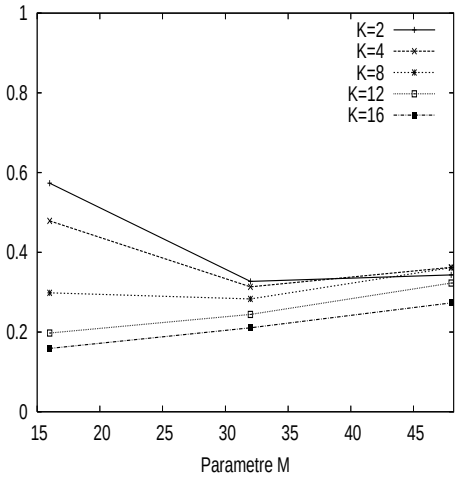


NK_p

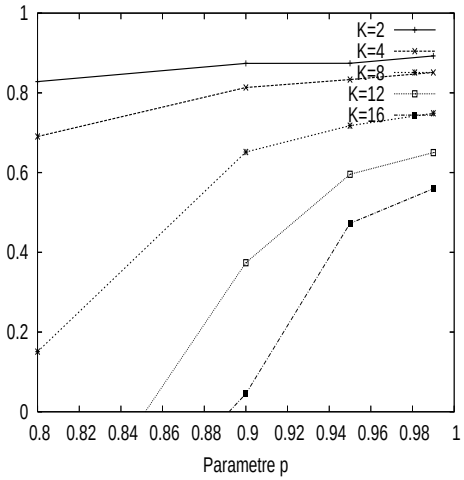
Autocorrélation de l'évolvabilité maximale



NK_q



NK_M



NK_p

Coefficient d'autocorrélation d'ordre 1 pour $N = 64$

Synthèse
Mesures

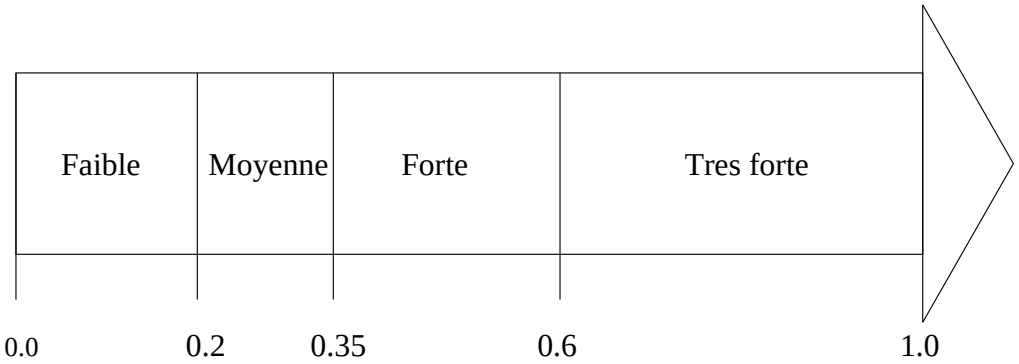
- Distribution des degrés de neutralité : quantification de la neutralité

Synthèse
Mesures

- Distribution des degrés de neutralité : quantification de la neutralité
- Autocorrélation des degrés : “structure” du réseau

Synthèse
Mesures

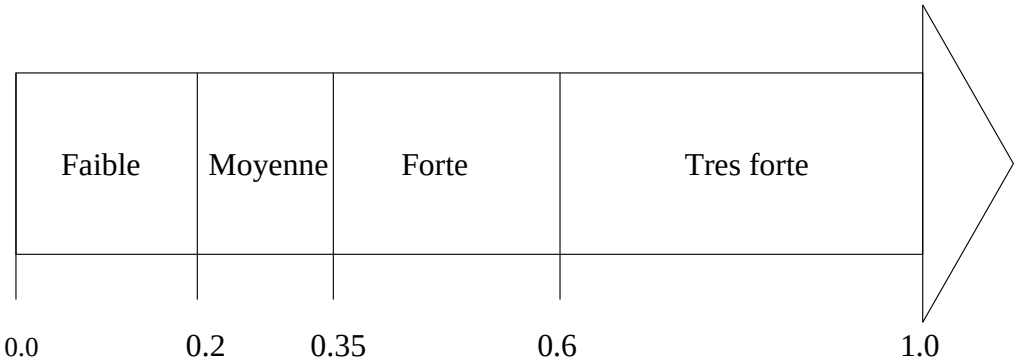
- Distribution des degrés de neutralité : quantification de la neutralité
- Autocorrélation des degrés : “structure” du réseau



- Distribution des tailles profil rang-taille : représentation pertinente

Synthèse
Mesures

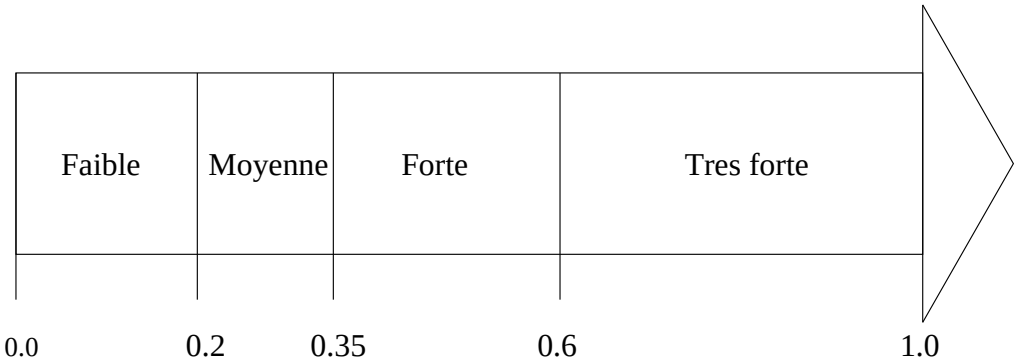
- Distribution des degrés de neutralité : quantification de la neutralité
- Autocorrélation des degrés : “structure” du réseau



- Distribution des tailles profil rang-taille : représentation pertinente
- Taux d’innovation : peu d’information

Synthèse
Mesures

- Distribution des degrés de neutralité : quantification de la neutralité
- Autocorrélation des degrés : “structure” du réseau



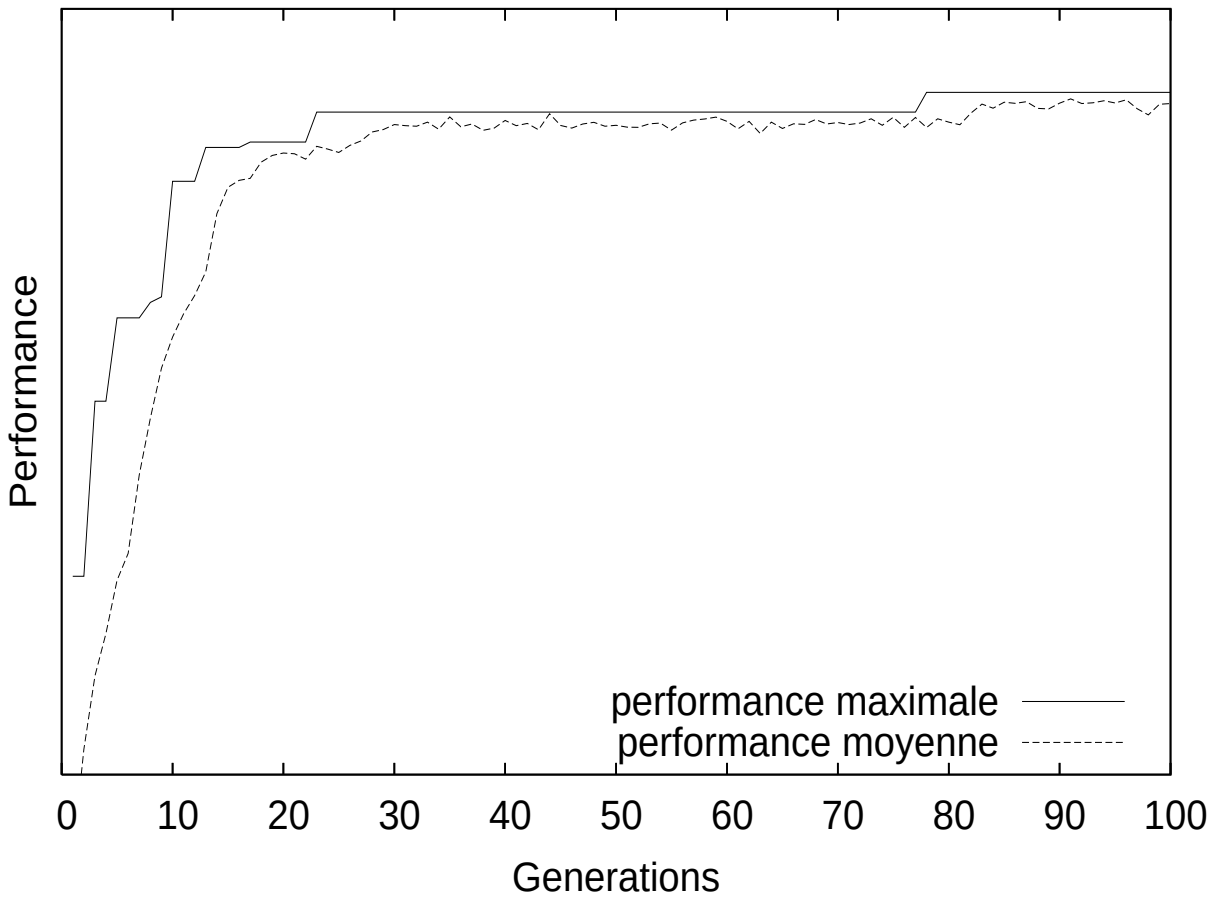
- Distribution des tailles profil rang-taille : représentation pertinente
- Taux d’innovation : peu d’information
- Autocorrélation de l’évolvabiltié maximale : nouvelle information sur la répartition des RN

Synthèse
Variantes NK

- Discrétiser les termes de la somme (NK_q)
  - Limite la quantité de neutralité
  - RN fortement structurés (influence de K)
- Discrétiser les valeurs prises par la somme (NK_M)
  - Pas de Limite à la neutralité,
  - RN faiblement structurés
- Rendre nulle certains termes de la somme (NK_p)
  - Contrôle fort de la neutralité,
  - RN fortement structurés

Dynamique dans les paysages neutres

Équilibres ponctués (Eldredge et Gould 1972)



Convergence sur un Réseau de Neutralité

Étudier en biologie (évolution moléculaire) :

- mutation
- sélection proportionnelle à la fitness

Proposition

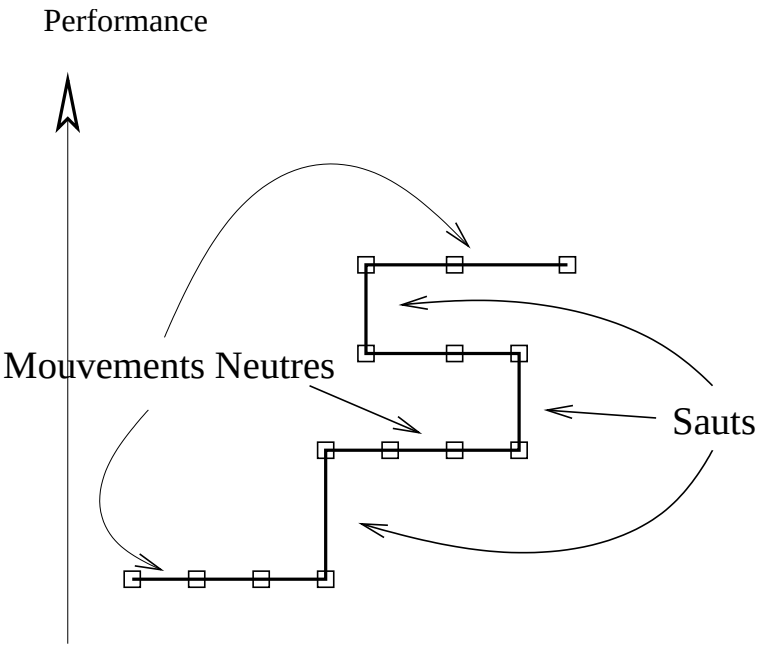
la distribution limite de la population sur un RN :

- Déterminée par la topologie du réseau,
- Indépendante de la proportion de solutions sur le RN ou du taux de mutation,
- Degré de neutralité moyen : population $>$ RN.

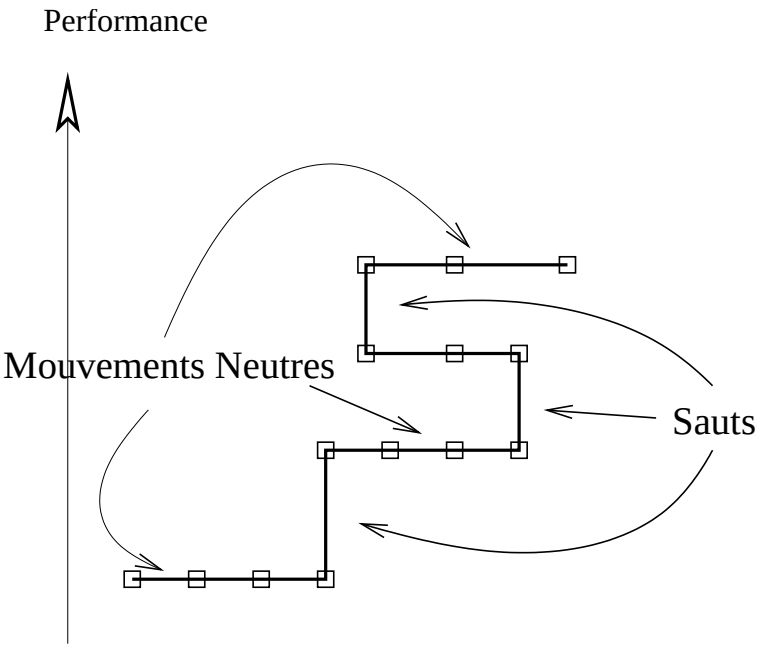
Domaine des AE :

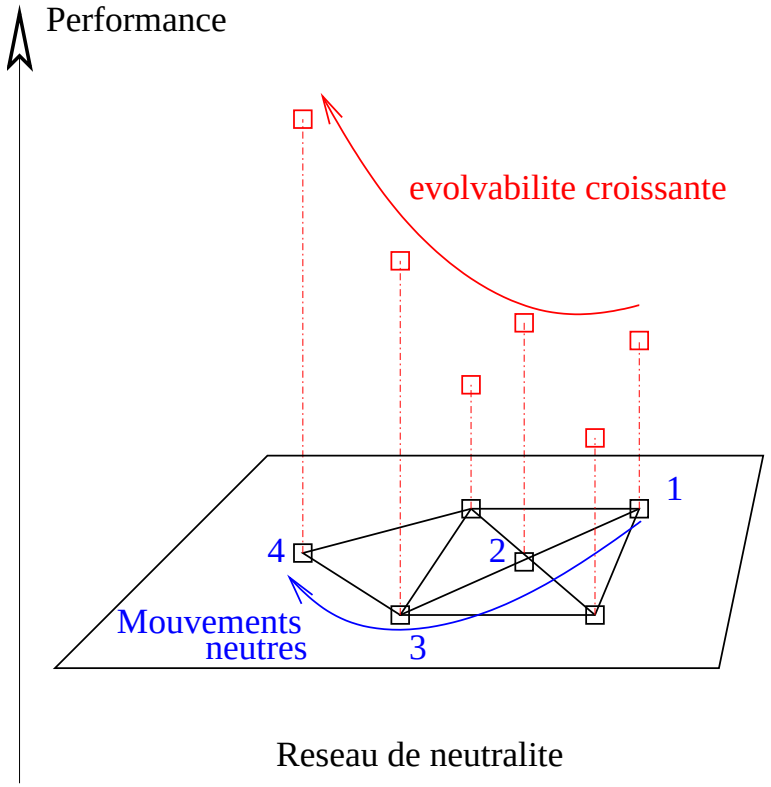
- Sélection par tournoi

Recherche Périscopique (Scuba Search)



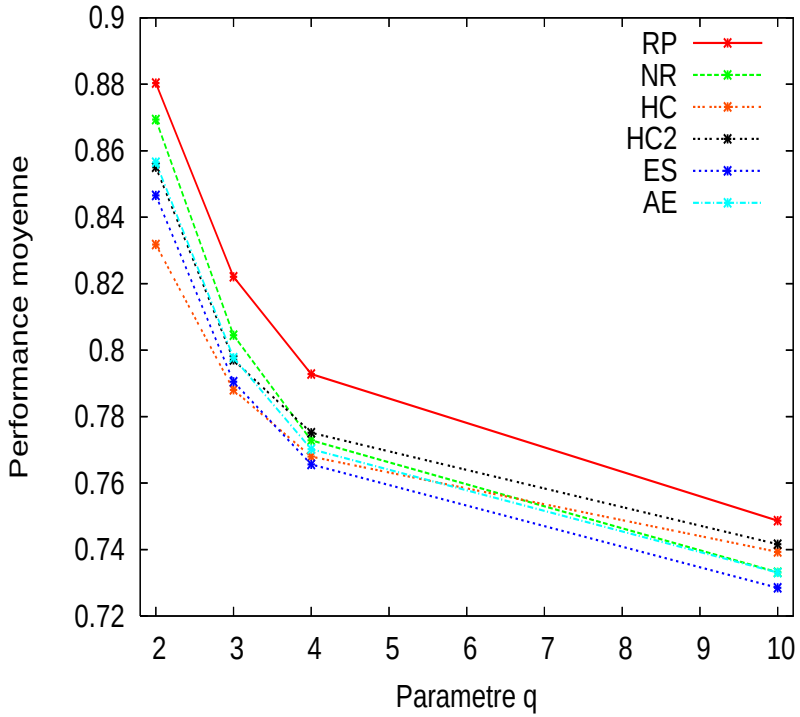
Recherche Périscopique (Scuba Search)



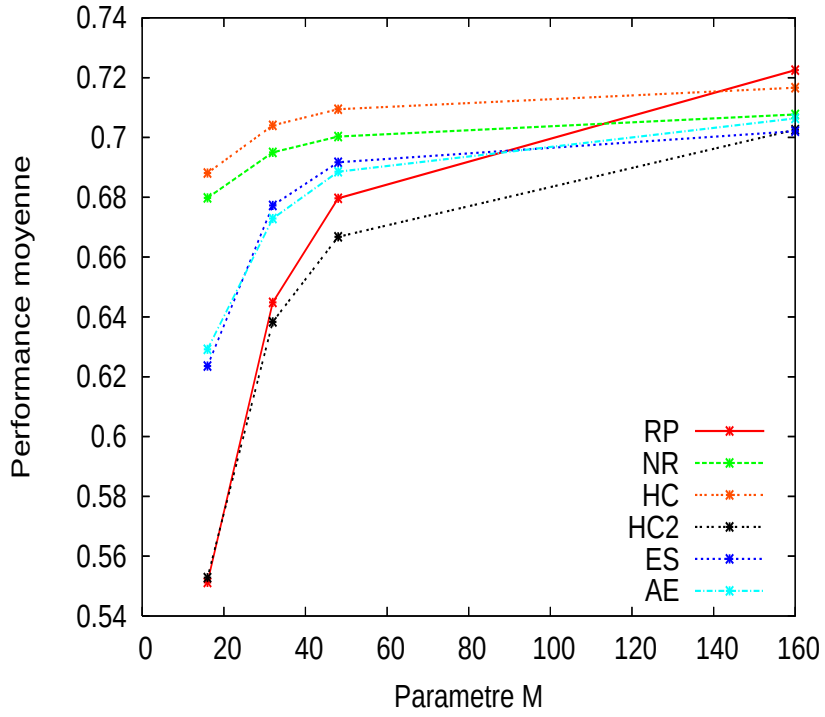


Mouvements neutres guidés par l'évolvabilité

Performances moyennes sur $N = 64$ et $K = 4$

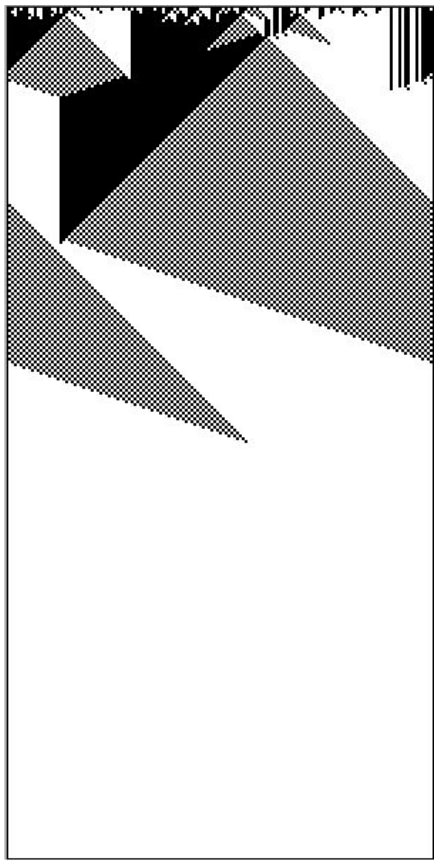


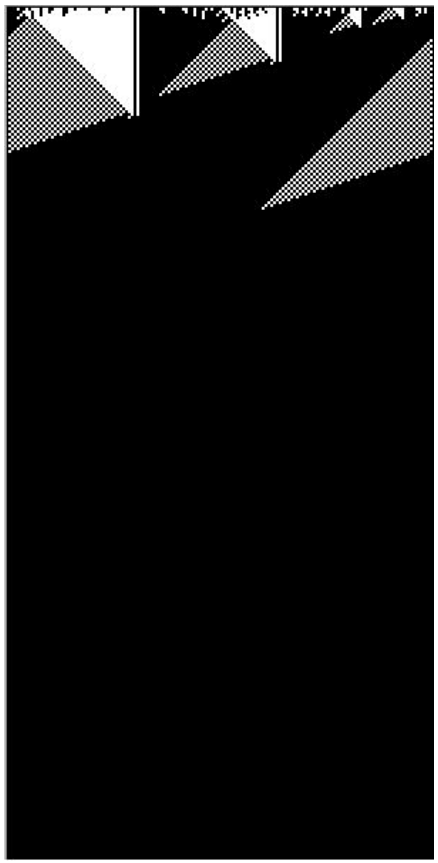
paysage NK_q



paysage NK_M

Problème de majorité



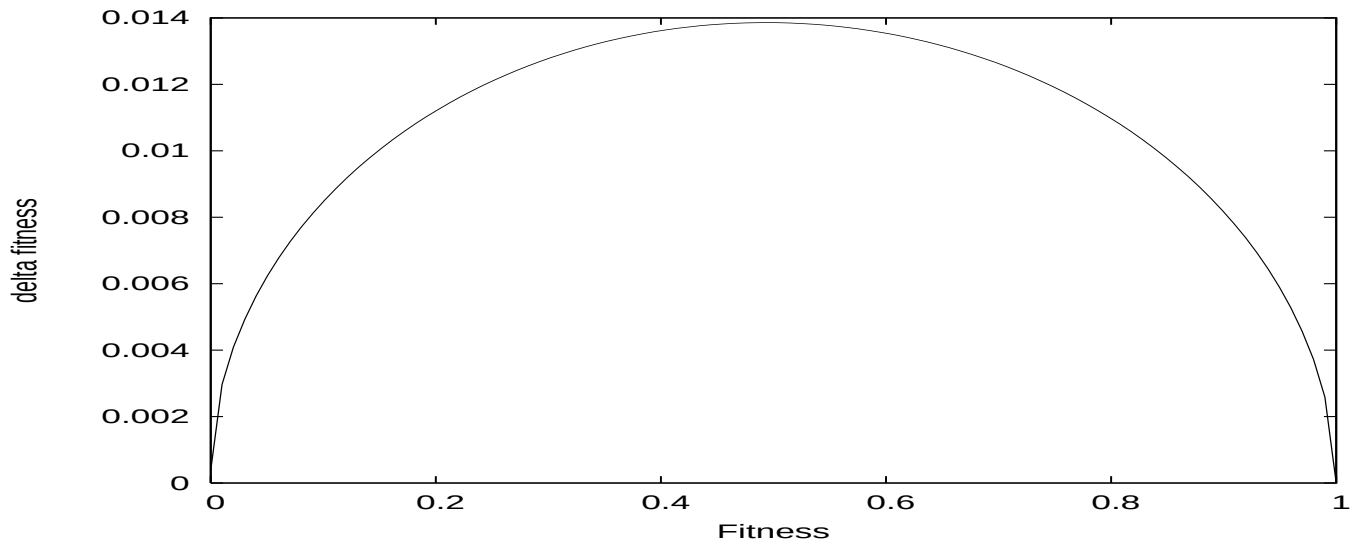


Rayon $r = 3$,
2^{128} règles possibles

Performance :
taux de succés sur
$n = 10^4$ CI de taille
149

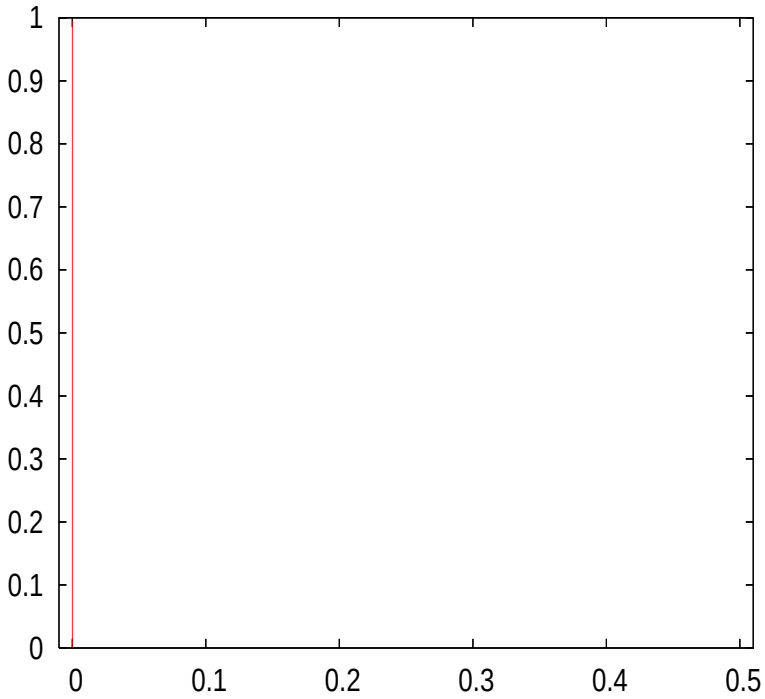
Diagramme espace-temps pour la règle GLK.

Neutralité du paysage

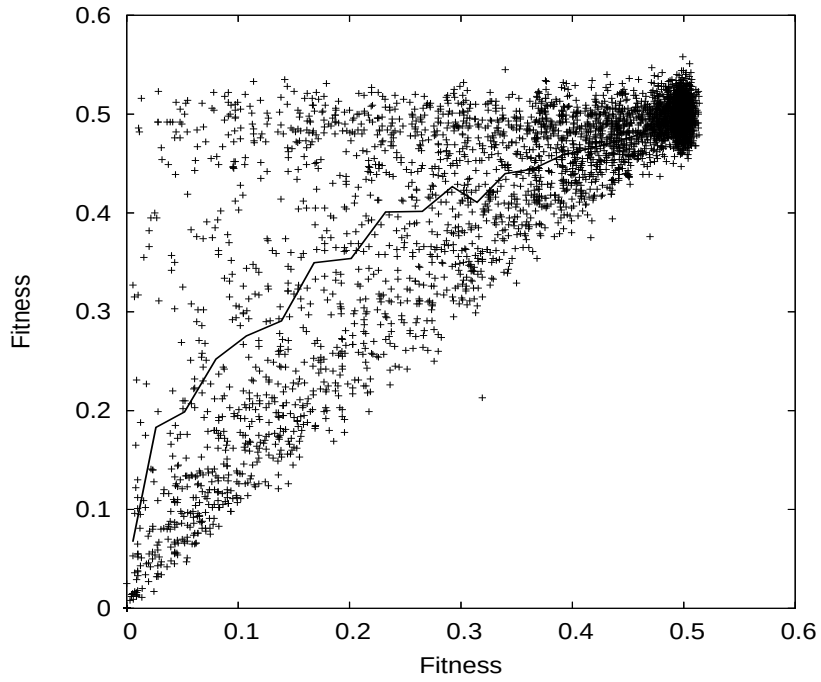


Erreur de l'évaluation de la performance calculé par un t-test pour un échantillon de CI de taille $n = 10^4$.
$isNeutral(s, s')$ est vrai ssi la différence de performance entre les deux solutions est en dessous la courbe.

Ensemble de Neutralité



D.O.S.

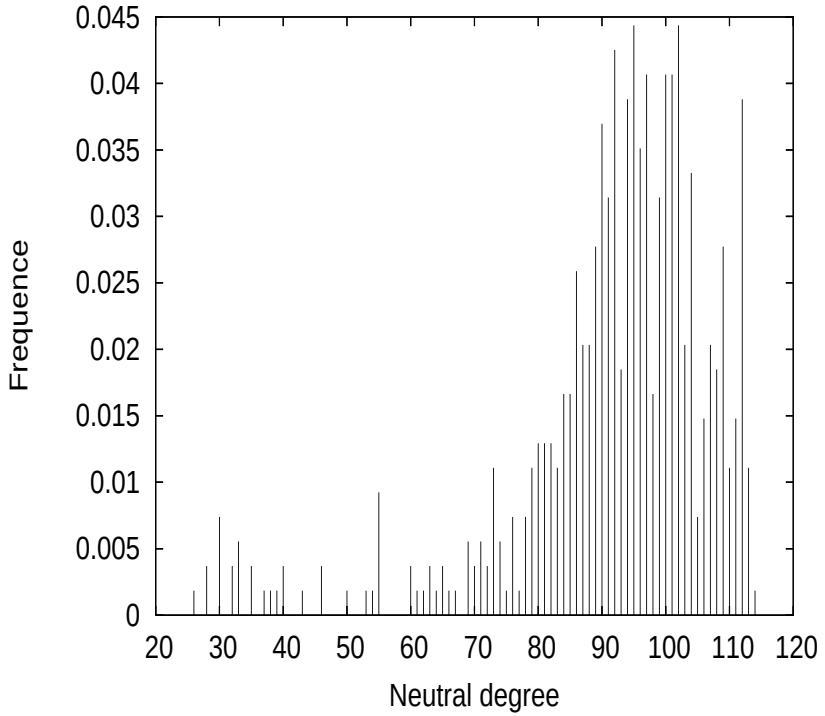


C.P.N. -0.7133

Réseaux de Neutralité

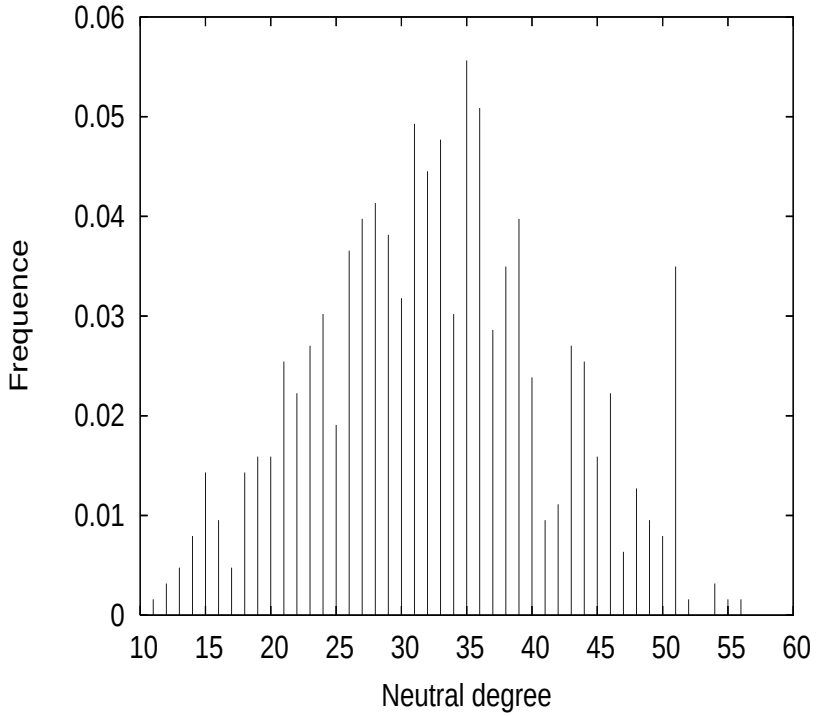
Distribution du degré de neutralité

$RN_{0.5}$



$E = 96.1$ $\sigma = 16.6$

$RN_{0.76}$

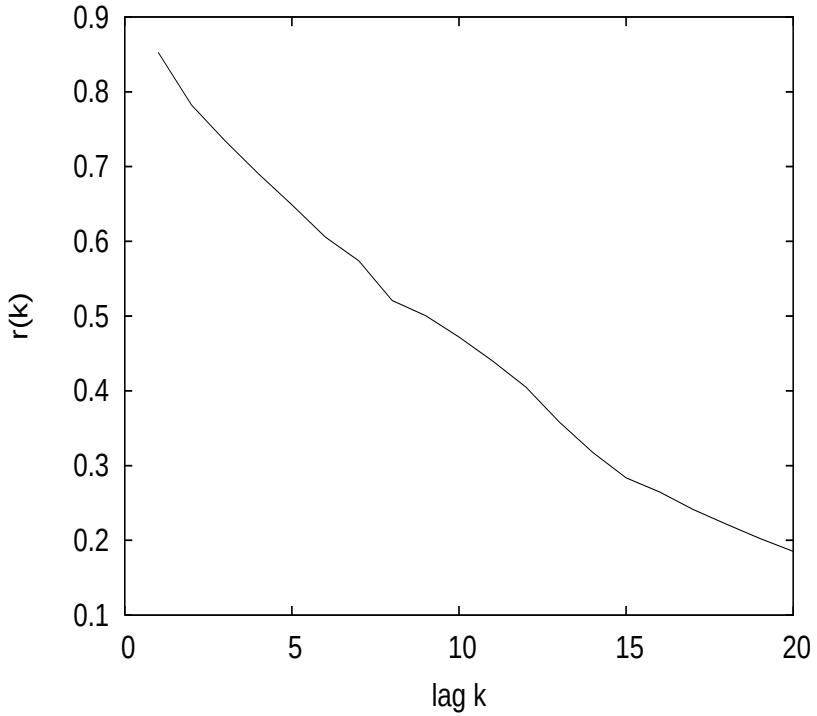


$E = 32.7$ $\sigma = 9.2$

Réseaux de Neutralité

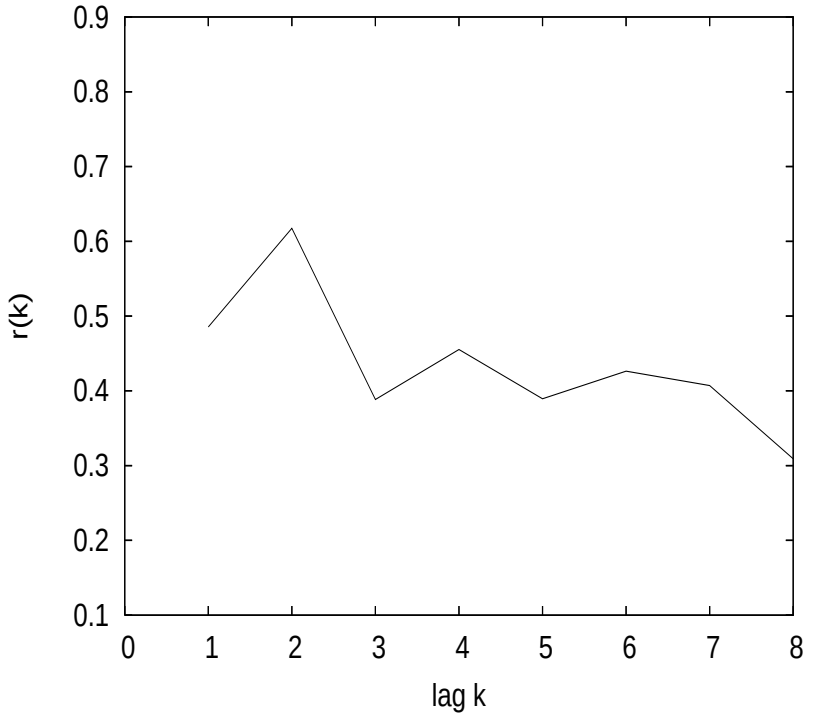
Autocorrélation des degrés de neutralité

$RN_{0.5}$



$\rho(1) = 0.85$

$RN_{0.76}$



$\rho(1) = 0.49$

Six meilleurs optima locaux connus (*moc*)

GLK	0.815	00000000 01011111 00000000 01011111 00000000 01011111 00000000 01011111 00000000 01011111 11111111 01011111 00000000 01011111 11111111 01011111
Das	0.823	00000000 00101111 00000011 01011111 00000000 00011111 11001111 00011111 00000000 00101111 11111100 01011111 00000000 00011111 11111111 00011111
Davis	0.818	00000111 00000000 00000111 11111111 00001111 00000000 00001111 11111111 00001111 00000000 00000111 11111111 00001111 00110001 00001111 11111111
ABK	0.824	00000101 00000000 01010101 00000101 00000101 00000000 01010101 00000101 01010101 11111111 01010101 11111111 01010101 11111111 01010101 11111111
Coe1	0.851	00000001 00010100 00110000 11010111 00010001 00001111 00111001 01010111 00000101 10110100 11111111 00010111 11110001 00111101 11111001 01010111
Coe2	0.860	00010100 01010001 00110000 01011100 00000000 01010000 11001110 01011111 00010111 00010001 11111111 01011111 00001111 01010011 11001111 01011111

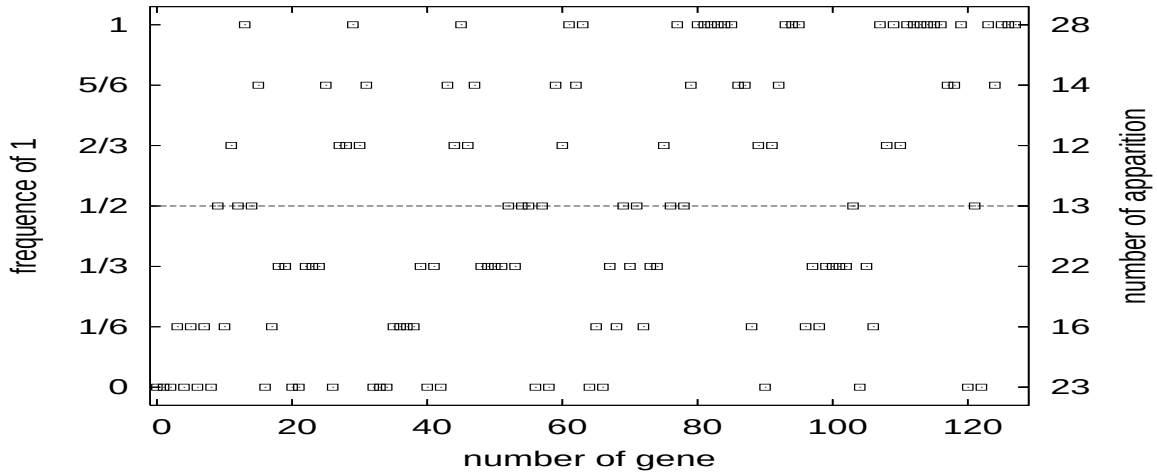
Olympe

L'*Olympe* est un sous-espace :

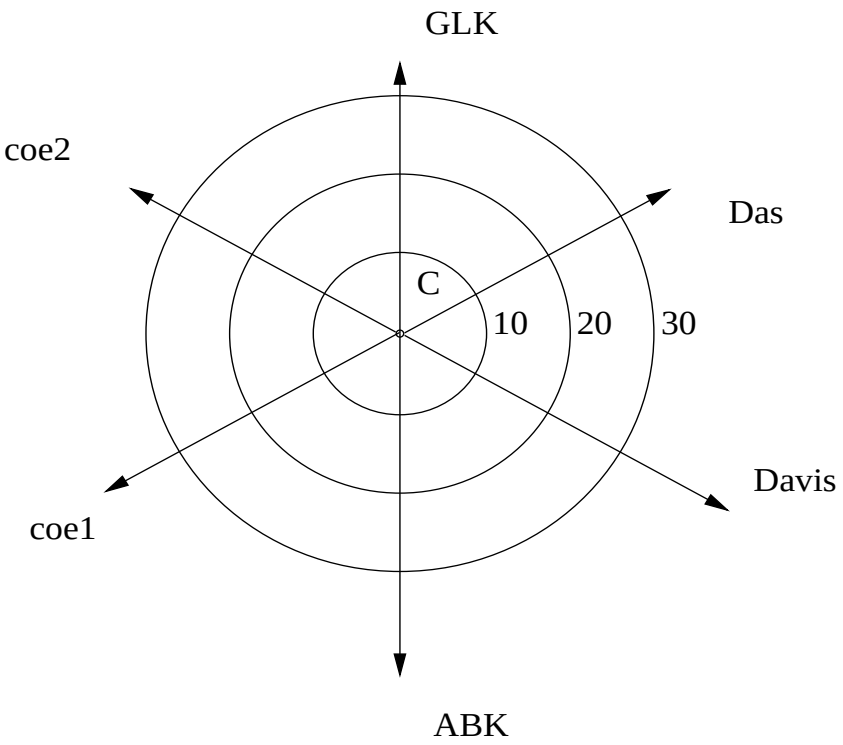
000*0*0* 0****1** 0***00** **0**1** 000***** 0*0**1** ******** 0*0**1*1

0*0***** *****1** 111111** **0**111 ******** 0**1*1*1 11111**1 0*01*111

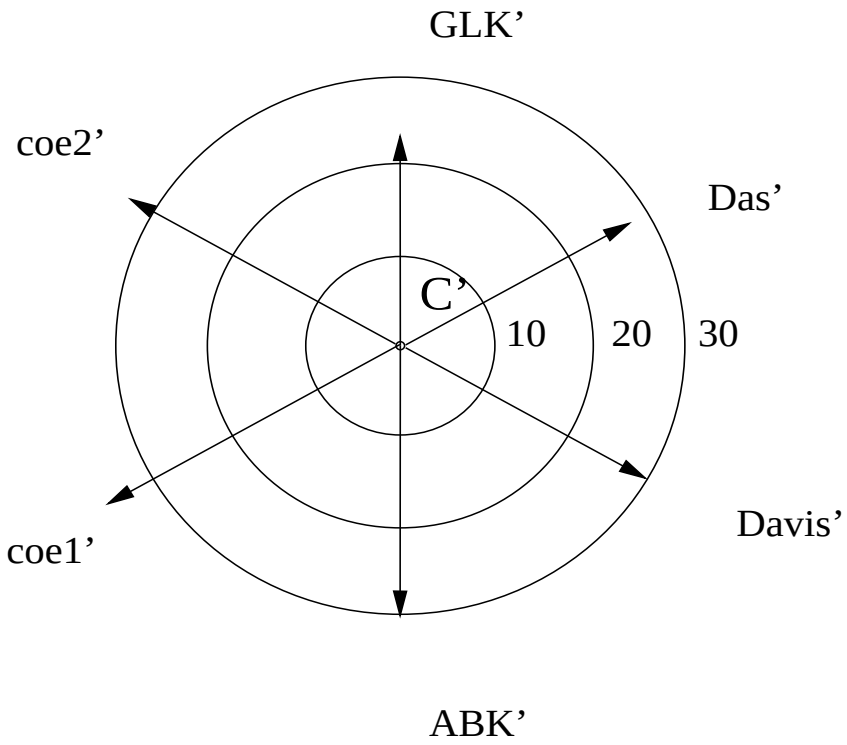
Centroïde C' des moc' :



Distances

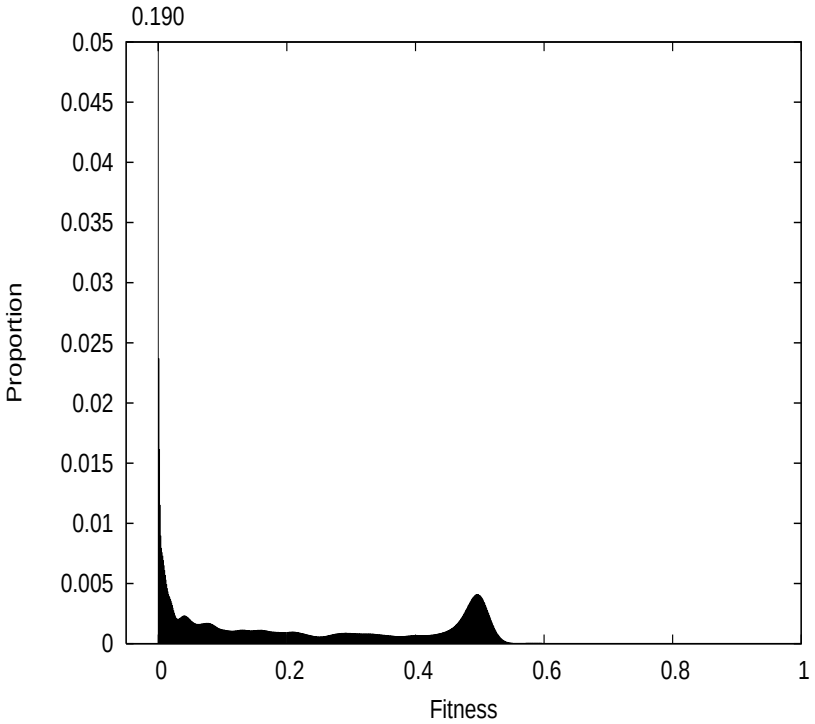


moc / centroïde C

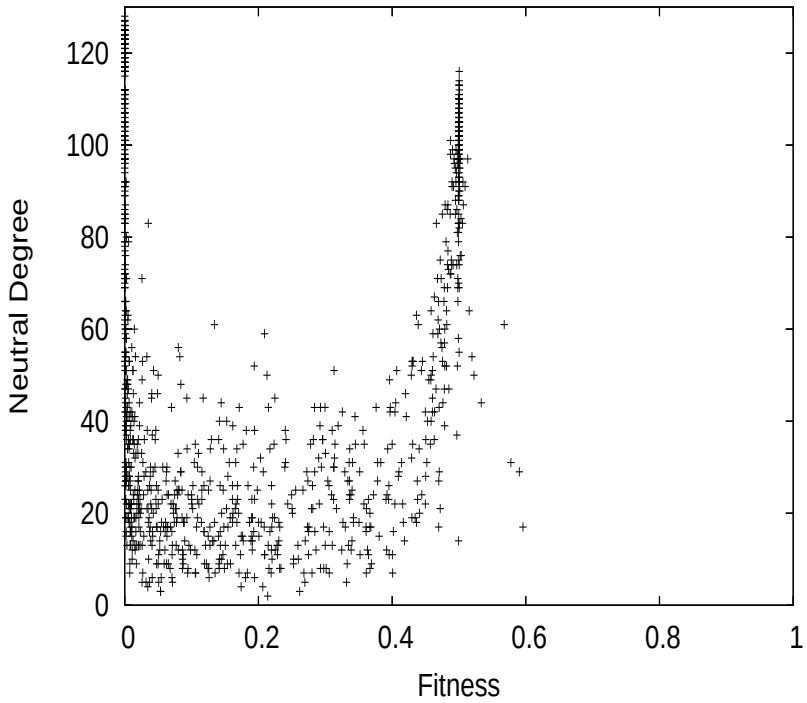


moc$'$ / centroïde C'

Neutralité



D.O.S.



degré de neutralité

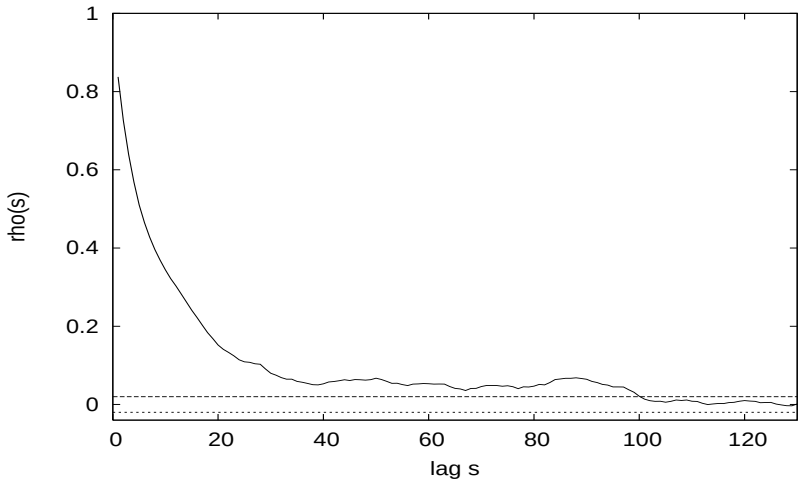
$E = 51.7$

Corrélation Performance Distance (FDC, Jones 1995)

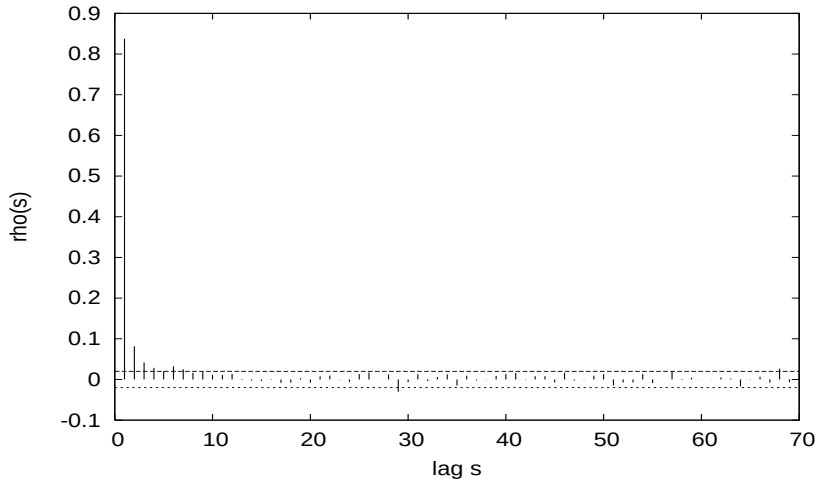
	FDC
GLK'	-0.15609
$Davis'$	-0.05301
Das'	-0.09202
ABK'	-0.23302
$Coe1'$	-0.01087
$Coe2'$	-0.11849
"plus proche"	-0.16376
C'	-0.23446

Rugosité de l'Olympe

Fonction d'autocorrélation (a) et d'autocorrélation partielle (b) d'une marche aléatoire sur l'Olympe.



(a)



(b)

- Forte corrélation : $\rho(1) = 0.838$
- Modèle $ARMA(2,1)$

Performances des AE

Performances de AE calculés sur un échantillon de CI de taille 10^4.

AE	Moyenne	Ecart-type	Max
AEo	0.8315	0.01928	0.8450
AEc	0.8309	0.00575	0.8432
AEn	0.8323	0.00556	0.8472

Conclusion

Paysage de Fitness : métaphore qui permet
–> l'analyse du lien entre metaheurisque et problème (dynamique)
–> imaginer de nouvelles metaheurisques
Propriété principale :
–> rugosité : optima locaux, structure de corrélation
–> neutralité : réseau de neutralité